

Torben Rieckmann

Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht

Eine Studie zur Entwicklung eines Lernmaterials für Personen mit Besonderheiten in der Simultanerfassung





Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht

Torben Rieckmann

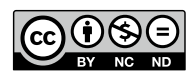
Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht

Eine Studie zur Entwicklung eines Lernmaterials für Personen mit Besonderheiten in der Simultanerfassung



Torben Rieckmann
Hamburg, Deutschland

Bei dem vorliegenden Text handelt es sich um einen Abdruck einer an der Fakultät für Erziehungswissenschaft der Universität Hamburg im Jahr 2021 angenommenen Dissertation mit dem Titel „Abstraktionen unter besonderen neuropsychologischen Bedingungen. Eine Studie zur Entwicklung eines Lernmaterials für Menschen mit Trisomie 21“. Die Open-Access-Publikation wurde durch Guter Unterricht für alle e. V. gefördert.
Gutachter*innen:
1. Prof. Dr. habil. André Frank Zimpel
2. Prof. Dr. Claudia Osburg
3. Prof. Dr. Kerstin Ziemen



ISBN 978-3-658-38944-4 ISBN 978-3-658-38945-1 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Planung/Lektorat: Stefanie Eggert
Springer VS ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Danksagung

Ich danke allen, die an das Promotionsprojekt geglaubt und auf vielfältige Weise zu seinem Gelingen beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt André Zimpel, der mir außerordentlich viele Freiheiten in der Gestaltung des Projekts einräumte und mich dennoch in entscheidenden Punkten intensiv unterstützte. Ich danke dem Forschungsteam *Geistige Entwicklung* an der Uni Hamburg und dem Team der Kinder- und Jugendpsychiatrischen Praxis Ingwersen für die Unterstützung bei der Entwicklung und Verwirklichung meiner Ideen. Claudia Osburg und Kerstin Ziemen danke ich für die Bereitschaft zur Begutachtung der Arbeit. Der Software AG-Stiftung danke ich für die finanzielle Unterstützung meines Forschungsvorhabens.

Ohne die Unterstützung von Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen mit und ohne Trisomie 21 wäre dieses Projekt nicht möglich gewesen. Ihnen und ihren engagierten Eltern und Lehrkräften gilt ebenfalls ein großer Dank!

Weiterhin danke ich Dennis Krohn, der den mathildr-Materialien ihre unverwechselbare und ästhetische Erscheinung verliehen hat. Meinem Vater Rolf Rieckmann danke ich für etliche Abende, freie Tage und Wochenenden, die er in die Programmierung der App investiert hat, um ein überzeugendes Unterrichtsmaterial zu schaffen, mit dem Kinder gerne lernen.

Raul Krauthausen danke ich für die Beratung und Unterstützung, die Ergebnisse des Forschungsprojekts in ein dauerhaft verfügbares Lernmaterial zu überführen. Ich danke Thomas Hoffmann, Kim Hurtig-Bohn und Sabine Ziegenhirt von *Guter Unterricht für alle e. V.* für ihre mannigfache Unterstützung und ehrenamtlichen Beiträge zur Bekanntmachung und Weiterentwicklung des

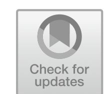
Lernmaterials. Dem Deutschen Down-Syndrom InfoCenter und insieme21 danke ich für die fachliche und freundschaftliche Verbundenheit und den Vertrieb der Lernmaterialien.

Für die unerschütterliche Geduld, emotionale und praktische Unterstützung danke ich meinen Familien, insbesondere meinen Eltern Silvia und Rolf und meinem Mann Max.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis



1 Einleitung

Wir Menschen mit Down-Syndrom haben auch ein Recht auf Leben. …

Wir wollen Teilhabe, wir wollen Inklusion, …

um die Welt zu verändern!

Andrea Halder (Weiss & Rapp, 2017)

Nicht erst seit der Diskussion um die neuen Möglichkeiten zur nicht invasiven Pränataldiagnostik stehen Menschen mit Trisomie 21 öffentlich für ihr Recht auf gesellschaftliche Teilhabe ein. Mehr noch: Sie möchten die Gesellschaft gestalten, wie das obige Zitat aus einem Fernsehbeitrag über die Aktivistin Andrea Halder verdeutlicht. Unbestritten erlaubt das Beherrschen von Kulturtechniken Menschen die Teilhabe an bestimmten Lebensbereichen, die ihnen andernfalls verwehrt bleiben würden. Insbesondere die Schriftsprache ermöglicht eine selbständige Navigation in unserer Informationsgesellschaft, unabhängig davon, ob sich im realen oder digitalen Raum bewegt wird. Darüber hinaus fördern aber auch ein verständiger Umgang mit Zahlen und ein mathematisches Verständnis die gesellschaftliche Teilhabe.

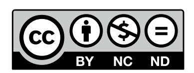
Diversität bereichert nicht nur unsere Gesellschaft, sondern auch das Leben in der Schule. Ein zeitgemäßer Unterricht berücksichtigt die Vielfalt und Verschiedenheit aller Schüler*innen. Lehrkräfte reagieren auf die ungleichen Wissensstände, Kompetenzen und Begabungen mit der Verteilung von Aufgabenstellungen unterschiedlicher Schwierigkeitsgrade und dem Einsatz offener Aufgabenformate. Darüber hinaus bieten sie Schüler*innen Einzellösungen an: So erhalten etwa gehörlose Schüler*innen idealerweise Übersetzungen in Gebärdensprache und blinden Schüler*innen werden keine PowerPoint-Folien präsentiert. Sie erhalten stattdessen eine Audiodeskription oder die Möglichkeit, den Inhalt über eine synthetische Stimme oder eine elektronische Braillezeile auszugeben.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_1

Der Unterricht gestaltet sich für die betreffenden Schüler*innen durch solche Maßnahmen barrierefrei oder zumindest barriereärmer.

Das vorliegende Forschungsprojekt ist aus der *Aufmerksamkeitsstudie zur Verbesserung des Lernerfolgs von Menschen mit einer Trisomie 21* hervorgegangen, die unter der Leitung von Prof. Dr. André Frank Zimpel im Jahr 2011 an der Universität Hamburg initiiert wurde. Bei der Studie handelt es sich um Grundlagenforschung, die sich mit der Frage befasst, wie sich die Verarbeitung der Umwelt von Personen mit Trisomie 21 von der Umwelt von Personen ohne Trisomie 21 unterscheidet. Sie belegt, dass Personen mit Trisomie 21 weniger Elemente gleichzeitig verarbeiten können als die meisten Menschen ohne dieses Syndrom. Dies hat zur Folge, dass bestimmte traditionelle Lernmaterialien, die im mathematischen Anfangsunterricht verwendet werden, für Lernende mit Trisomie 21 nur einen begrenzten Nutzen haben. Aus diesem Grund erscheint es nicht verwunderlich, dass Menschen mit Trisomie 21 häufig mathematische Lernschwierigkeiten zeigen. Pablo Pineda ist der erste europäische Hochschulabsolvent mit Trisomie 21. Er gilt als Ausnahmetalent, ist Lehrer, Dozent und Filmschauspieler. Trotz seiner hohen Qualifikation erklärt er in einem Interview: „Mathe war schrecklich. Das Fach ist mir bis heute ein Rätsel“ (Viciano Gofferje, 2004). Hätte sich Pineda in der Schule also mehr anstrengen sollen? Oder liegen die mathematischen Lernschwierigkeiten im Unterricht begründet? Es scheint, als würden sich die üblichen didaktischen Veranschaulichungen in der Arithmetik für Lernende mit Trisomie 21 ebenso wenig eignen wie die Präsentation von PowerPoint-Folien für blinde Schüler*innen.

Die folgende Arbeit beschäftigt sich mit der Frage, welche Lernbesonderheiten bei einer Trisomie 21 vorliegen und weshalb diese zu mathematischen Lernschwierigkeiten führen. Die Eignung von Lernmaterialien, die mit der *Kraft der Fünf* arbeiten, wird für Lernende mit Trisomie 21 begründet in Frage gestellt. Im Anschluss folgen die Entwicklung und Evaluierung einer alternativen Form der Veranschaulichung von Mengen und Operationen, die Schüler*innen mit Trisomie 21 einen barrierefreien oder zumindest barriereärmeren Mathematikunterricht ermöglichen soll.


BY NC ND

Check for updates

2 Trisomie 21: Geistige Behinderung oder Teil einer Neurodiversität?

> Mich macht wütend, die Menschen denken, ich habe Down-Syndrom und bin krank. Ich bin aber gesund!! Und auch nicht dumm. Die Menschen sind dumm, die nicht den Unterschied zwischen Krankheit und Behinderung kennen. Kranksein bedeutet Schmerzen haben oder Husten. Und dann bekommt man Medizin und geht zum Arzt. (Petkewitz, 2019)

Robert Petkewitz ist Redakteur des Magazins *Ohrenkuss* und thematisiert mit diesen Worten die Pathologisierung des Down-Syndroms in der Gesellschaft. Trisomie 21 wird häufig als Krankheit missinterpretiert und Betroffene werden wiederholt als Personen bezeichnet, die „unter dem Down-Syndrom leiden". Sprachlich werden ihnen dabei vermeintlich „gesunde" Menschen gegenübergestellt (vgl. Leidmedien, 2019). „Die Gleichsetzung von Behinderung mit Krankheit und therapiewürdig ist heute auch ins Alltagsbewußtsein übergegangen und ersetzt das alte Euthanasie-Denken", schrieb Michael Wunder (1982, S. 74) zur Hoch-Zeit der selbsternannten Krüppelbewegung. Die Frage, welchen Einfluss eine Pathologisierung auf das Narrativ *Down-Syndrom* hat und welche Folgen für die Wertschätzung und Geburtenrate von Menschen mit Trisomie 21 daraus resultieren, kann an dieser Stelle nicht thematisiert werden. Stattdessen soll im folgenden Kapitel eine zeitgemäße und wissenschaftlich fundierte Auseinandersetzung mit dem Down-Syndrom respektive Trisomie 21 erfolgen. Nach der Einordnung des Syndroms als Chromosomenanomalie und einer Darstellung des Forschungsstands zu den kognitiven Fähigkeiten von Menschen mit Trisomie 21 wird der Begriff der *geistigen Behinderung* in Frage gestellt. Es werden

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_2.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_2

Besonderheiten im Lernen bei Trisomie 21 anhand der Algebra thematisiert und mit Forschungsergebnissen zur Aufmerksamkeit bzw. Simultanerfassung erklärt. Zuletzt wird der Begriff der *Neurodiversität* als alternative Betrachtungsweise der kognitiven Besonderheiten bei Trisomie 21 anempfohlen.

2.1 Chromosomenanomalie

Der Psychiater Jean Étienne Esquirol (1838) sowie der Arzt und Pädagoge Édouard Séguin (1864) gelten als die ersten Autoren, die Personen mit Trisomie 21 beschrieben haben (Häcker, 2007, S. 1005). Esquirol stellte verschiedene Menschen mit Beeinträchtigungen vor, die, in seinen Worten, von „Idiotie" betroffen seien. Er thematisierte ihr Verhalten, die mutmaßlichen Ursachen der Behinderung und ihren Lebensalltag. Für die akribische Beschreibung des Erscheinungsbildes seiner lebendigen wie toten Patienten nahm er u. a. Kopfvermessungen vor (vgl. Esquirol, 1838, S. 157 ff.). Séguin griff die Beobachtungen Esquirols auf und formulierte Merkmale, anhand derer verschiedene Formen der „Idiotie" diagnostiziert werden könnten (vgl. Séguin, 2012, S. 85 ff.). Als Entdecker des nach ihm benannten Syndroms gilt allerdings John Langdon Down, der eine Klinik für Menschen mit Behinderung leitete (Häcker, 2007, S. 1005). Down stellte Gemeinsamkeiten in der phänotypischen Erscheinung einiger seiner Patienten fest und prägte den Begriff „Mongolian type of idiocy" (1866, S. 261). Downs Intention zu seiner heute als rassistisch abgelehnten Begriffsfindung erklärt Zimpel (2017a, S. 224 f.): „Die eher mandelförmige Augenform aufgrund der geschrägten Lidachsen, die flache Nasenwurzel und die kleine sichelförmige Hautfalte an den inneren Augenwinkeln, die typisch für Menschen mit einer Trisomie 21 sind, mögen dazu beigetragen haben. Er glaubte, man erkenne die Einheit der menschlichen Rasse an den anatomischen Merkmalen von Kindern."

Die Ursachen des Down-Syndroms wurden erstmalig von Lejeune, Gautier und Turpin (1959) erforscht. Anhand von neun Kindern mit Down-Syndrom bewiesen sie, dass das 21. Chromosom, das gewöhnlich nur zwei Mal in einer Zelle auftritt, in dreifacher Form vorhanden ist (Lejeune et al., 1959, S. 1722). Diese Chromosomenanomalie, bei der die betroffene Person 47 anstatt der üblichen 46 Chromosomen aufweist, wird als *Trisomie 21* bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Neugeborenes eine Trisomie 21 hat, beträgt 1:600–800, wobei die Wahrscheinlichkeit mit dem Alter der Mutter des Kindes ansteigt. Bei 95 % der Personen mit dieser Chromosomenanomalie liegt eine freie Trisomie 21 vor, bei der alle Körperzellen ein zusätzliches 21. Chromosom aufweisen (Strauss,

2017, S. 413). Daneben existieren die Mosaikform der Trisomie 21, bei der nur ein Teil der Körperzellen betroffen ist, die Translokationsform der Trisomie 21, bei der sich eines der Chromosomen mit der Nummer 21 an ein anderes Chromosom geheftet hat, sowie die partielle Trisomie 21, bei der Genabschnitte eines der beiden Chromosomen Nummer 21 verlängert sind (Zimpel, 2016, S. 19).

Im Verzeichnis *Internationale statistische Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme* ICD-10 wird das Down-Syndrom als Chromosomenanomalie unter der Kennziffer Q90 geführt (vgl. Bundesinstitut für Arzneimittel und Medizinprodukte, 2020). In einem Entwurf der ICD-11 (Version 09/2020) ist *Complete Trisomy 21*, die freie Trisomie 21, unter der Kennziffer LD40.0 zu finden und wird folgendermaßen charakterisiert: „Trisomy 21 is a chromosomal abnormality, characterised by the presence of a third (partial or total) copy of chromosome 21, which clinical manifestations include variable intellectual deficiency, muscular hypotonia and joint laxity, often associated with facial dysmorphism and variable malformations (essentially heart and digestive) and a risk of complications (epilepsy, leukemia, auto-immune and endocrine pathologies, earlier aging and Alzheimer disease“ (World Health Organization, 2020). Symptome einer Trisomie 21 sind demnach ein variables intellektuelles Defizit, Muskelhypotonie, Gelenknachgiebigkeit, Gesichtsdysmorphismus, variable Fehlbildungen u. a. bei Herz und Verdauung sowie ein Risiko von Epilepsien, Leukämie, Autoimmunerkrankungen, hormonelle Erkrankungen, frühzeitiges Altern und Alzheimer-Krankheit.

2.2 Kognitive Fähigkeiten bei Trisomie 21

2.2.1 Forschungsstand

Diverse Forschungsarbeiten zur Trisomie 21 gehen der Frage nach, wie sich das „variable intellektuelle Defizit“ äußert, das laut ICD-11 regelmäßig mit einer Trisomie 21 einhergeht. In der Regel werden der Intelligenzquotient, die Schriftsprache und die mathematischen Fähigkeiten von Schüler*innen mit Trisomie 21 erhoben, um Rückschlüsse auf die kognitive Entwicklung zu ziehen.

Lorenz, Sloper und Cunningham (1985) ermittelten mithilfe einer Befragung von Lehrpersonen die Lesefähigkeit von 58 Schüler*innen mit Trisomie 21 im Alter von fünf bis sieben Jahren. 47 % der Schüler*innen im Alter von fünf Jahren, 63 % im Alter von sechs Jahren und 75 % im Alter von sieben Jahren waren in der Lage, ihren eigenen Namen zu lesen. Die Fähigkeit, fünf bis zehn Wörter

lesen zu können, wurde bei 19 % der Fünfjährigen, 32 % der Sechsjährigen und 44 % der Siebenjährigen beobachtet (Lorenz et al., 1985, S. 65).

Buckley und Sacks veröffentlichten 1987 ihre Forschungsergebnisse zu 90 Kindern und Jugendlichen mit Trisomie 21 im Alter von elf bis 17 Jahren. Zuvor befragten sie deren Familien u. a. zu ihrer Autonomie im täglichen Leben, den schulischen Fähigkeiten, ihrer Gesundheit, ihrem Verhalten und zur psychischen Entwicklung der Untersuchungspersonen. Buckley und Sacks unterschieden dabei zwei Versuchsgruppen: Die erste Gruppe bestand aus unter 14-jährigen Kindern, darunter 18 Mädchen (Durchschnittsalter 12;3) und 28 Jungen (Durchschnittsalter 12;6). Die zweite Gruppe bestand aus Jugendlichen im Alter von 14 bis 17 Jahren und setzte sich aus 40 Mädchen (Durchschnittsalter 16;1) und 50 Jungen (Durchschnittsalter 15;6) zusammen (Buckley & Sacks, 1987, S. 17). 92 % der Mädchen und 77 % der Jungen in der Gruppe der unter 14-Jährigen waren laut Angabe der Familie in der Lage, ganze Sätze zu lesen. Dies traf auch auf 77 % der Mädchen und 87 % der Jungen in der Jugendlichen-Gruppe zu. Als „ziemlich gute Leser“ wurden 16 % der Jungen unter 14 und 18 % der Jungen über 14 bezeichnet. Sie waren in der Lage, Bücher zu lesen, die über spezielle Erstleser*innenliteratur hinausgehen. Von den weiblichen Teilnehmenden waren 36 % der unter 14-Jährigen und 22 % der über 14-Jährigen ebenfalls in der Lage, Bücher aus der Kinder- und Jugendliteratur (z. B. *Die Fünf Freunde* von Enid Blyton) zu lesen (Buckley & Sacks, 1987, S. 55 f.).

Um die mathematischen Fähigkeiten der Teilnehmenden zu untersuchen, wurden u. a. Fragen zur Zählfähigkeit gestellt. 22 % der Mädchen sowie 25 % der Jungen unter 14 waren in der Lage, die Zahlenreihe über die 20 hinaus aufzusagen. In der Gruppe der über 14-Jährigen gelang dies 45 % der Mädchen und 54 % der Jungen. Das tatsächliche Zählen von mehr als 20 Objekten gelang 6 % der Mädchen und 14 % der Jungen unter 14 Jahren sowie jeweils 27 % der Mädchen und Jungen über 14 Jahren. Des Weiteren wurden Fragestellungen zur Arithmetik erhoben, die die Fähigkeit zur Durchführung simpler Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen und Divisionen zum Gegenstand hatten. Simple Additionen gelangen demnach 59 % der Mädchen und Jungen in der Gruppe der Jugendlichen sowie 45 % der Mädchen und 43 % der Jungen in der Kindergruppe. Die Subtraktion konnten 37 % der jugendlichen Mädchen und 32 % der jugendlichen Jungen sowie 28 % der Mädchen und 22 % der Jungen unter 14 Jahren durchführen. Nur vereinzelten Untersuchungspersonen gelangen indes Multiplikation und Division (Buckley & Sacks, 1987, S. 61).

Carr (1988) berichtet von einer Langzeitstudie, in der die kognitiven Fähigkeiten von 54 Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 im Alter von 21 Jahren erfasst wurden. Der durchschnittliche IQ der Untersuchungspersonen veränderte

sich im Laufe der Studie. Betrug dieser im Alter von sechs Monaten noch 80, sank er auf 45 im Alter von vier Jahren und auf 37 im Alter von elf Jahren. Im Alter von 21 Jahren wurde mithilfe der *Leiter International Performance Scale* ein durchschnittlicher Intelligenzquotient von 41,9 ermittelt (Carr, 1988, S. 409 f.). Im *Vernon's Arithmetic-Mathematics Test* erzielten 34 der Untersuchungspersonen im Alter von 21 Jahren einen Score, der eine Auswertung ihrer Testergebnisse ermöglichte. Ihr durchschnittliches arithmetisches Entwicklungsalter betrug 5;6 Jahre. Die Lesefähigkeit der 21-jährigen Teilnehmenden wurde mit Hilfe des *Neale Analysis of Reading Tests* überprüft, bei dem lediglich 16 Teilnehmende einen Score erzielten. Ihr durchschnittliches Entwicklungsalter im Bereich Lesen betrug 7;8 Jahre (Carr, 1988, S. 411 f.).

Gelman und Cohen führten eine Studie zu Zählfähigkeiten und -strategien bei Trisomie 21 durch. Dabei untersuchten sie zehn Personen mit Trisomie 21 im Alter von neun bis 13 Jahren (Durchschnittsalter 11) sowie 16 Vierjährige und 16 Fünfjährige ohne Syndrom (Gelman & Cohen, 1988, S. 67 f.). Die Kontrollgruppe schnitt in der Untersuchung besser ab und nutzte im Gegensatz zur Experimentalgruppe Zählprinzipien (Gelman & Cohen, 1988, S. 92).

Im Rahmen einer Langzeitstudie verglich Shepperdson die schriftsprachlichen und mathematischen Fähigkeiten von Personen mit Trisomie 21 zweier Jahrgänge im Jugendalter. Der ersten Untersuchungsgruppe gehörten 49 Teilnehmende an, die Mitte der 1960er-Jahre geboren wurden. Zu dieser Gruppe existieren zusätzlich Daten aus dem Erwachsenenalter. In der zweiten Untersuchungsgruppe gab es 26 Untersuchungspersonen, die in den 1970er-Jahren geboren wurden (Shepperdson, 1994, S. 98). Shepperdson stellte Fachleuten, in der Regel Lehrkräften, 26 Fragen zu den mathematischen Fähigkeiten der Untersuchungspersonen. Die Bandbreite reichte dabei von der Fähigkeit, bis fünf zu zählen, bis zur Aufgabe, zehn Objekte zwischen zwei Personen gerecht zu verteilen (Shepperdson, 1994, S. 98). Die Gruppe, die in den 1960er-Jahren geboren wurde, erreichte im Jugendalter einen durchschnittlichen Score von 10,3. Im Erwachsenenalter schnitten 15 Teilnehmende dieser Gruppe deutlich besser ab als noch in ihrer Jugend. 23 Untersuchungspersonen offenbarten dagegen deutlichere Schwierigkeiten als zuvor. Insgesamt zeigt sich im Erwachsenenalter ein marginal höherer Durchschnittsscore. Die Untersuchungspersonen, die in den 1970er-Jahren geboren wurde, zeigten im Jugendalter einen durchschnittlichen Score von 14,2 und schnitten damit deutlich besser ab als die Gruppenmitglieder, die in den 1960er-Jahren geboren wurden (1994, S. 100). Shepperdson befragte die Lehrkräfte außerdem mithilfe einer modifizierten Variante des *Schonell Graded Word Reading Tests* nach den Lesefähigkeiten der Untersuchungspersonen (1994, S. 98). Von den 49 Untersuchungspersonen, die in den 1960er-Jahren geboren wurden,

konnten als Jugendliche 17 einen Score in diesem Test erzielen. Ihr durchschnittliches Entwicklungsalter in Bezug auf die Lesefähigkeit betrug 7;3 Jahre. Aus der gleichen Gruppe konnten im Erwachsenenalter lediglich zwölf Personen einen Score erzielen. Ihr durchschnittliches Entwicklungsalter in Bezug auf die Lesefähigkeit betrug 8;6 Jahre. Aus der Gruppe der adoleszenten Teilnehmenden, die in den 1970er-Jahren geboren wurden, konnten lediglich 15 von 58 einen Score erreichen. Ihr durchschnittliches Entwicklungsalter in Bezug auf die Lesefähigkeit betrug 7;6 Jahre (Shepperdson, 1994, S. 99).

Porter (1999) setzte sich mit den Schwierigkeiten von Personen mit Trisomie 21, Zählen zu lernen, auseinander. Die Untersuchungsgruppe bestand aus 16 Personen mit Trisomie 21 im Alter von 7;0 und 13;8 Jahren (Durchschnittsalter 10;1). Diese matchte Porter mit einer Kontrollgruppe aus 16 Personen, die ebenfalls Lernschwierigkeiten, aber keine Trisomie 21 aufwiesen und die gleichen Zählfähigkeiten zeigten. Beide Gruppen sollten Aufgaben bewältigen, die u. a. darin bestanden, verschiedene Anzahlen an Schmuckstücken zu zählen und eine Puppe zu korrigieren, der Fehler beim Zählen unterliefen (Porter, 1999, S. 87). Verglichen wurde die Berücksichtigung des Prinzips der stabilen Ordnung, des Prinzips der Eins-zu-Eins-Zuordnung und des Kardinalzahlprinzips. Im Gegensatz zur Kontrollgruppe offenbarten die Teilnehmenden mit Trisomie 21 mehr Schwierigkeiten bei der Wiedergabe der korrekten Zahlenfolge. Eine Stärke wiesen sie dagegen in der Eins-zu-Eins-Zuordnung auf (Porter, 1999, S. 88).

Mit dem Ziel, die Bedeutung von Sprache beim Erwerb numerischer Fähigkeiten zu erforschen, verglichen Paterson, Girelli, Butterworth und Karmiloff-Smith (2006) Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 und dem Williams-Beuren-Syndrom in drei Experimentalreihen. Die dritte Experimentalreihe enthielt u. a. Zählaufgaben, Aufgaben zur Benennung des Vorgängers oder Nachfolgers einer Zahl, Aufgaben zur Seriation sowie Additions-, Subtraktions- und Multiplikationsaufgaben (Paterson et al., 2006, S. 197 f.). Die Stichprobe bildeten acht Teilnehmende mit Williams-Beuren-Syndrom im Alter von 10;11 und 32;9 Jahren (Durchschnittsalter 20;9) sowie sieben Teilnehmende mit Trisomie 21 im Alter von 17;11 und 35;3 Jahren (Durchschnittsalter 26;4). Als Kontrollgruppen fungierten Teilnehmende ohne Syndrom, die einmal nach dem chronologischen Alter und einmal nach dem Entwicklungsalter gematcht wurden. Die beiden Versuchsgruppen schnitten erwartungsgemäß schlechter ab als die Kontrollgruppe mit gematchtem chronologischen Alter. Die Versuchsgruppe mit Williams-Beuren-Syndrom ließ grundsätzlich größere Schwierigkeiten im Umgang mit Zahlen erkennen als die Versuchsgruppe mit Trisomie 21 (Paterson et al., 2006, S. 199). Da sie davon ausgingen, dass Menschen mit Trisomie 21 größere Sprachbarrieren haben als Personen mit Williams-Beuren-Syndrom, schlossen Paterson et al.

aus diesen Ergebnissen, dass die Entwicklung numerischer Fähigkeiten keine ausgeprägten verbalen Fähigkeiten voraussetzt (2006, S. 200).

Brigstocke, Hulme und Nye (2008) untersuchten die arithmetischen Fähigkeiten von 49 Menschen mit Trisomie 21 im Alter von 5;6 bis 16;2 Jahren. Im standardisierten *BAS Basic Number Skills Test* erreichten lediglich 27 der Teilnehmenden ein auswertbares Ergebnis, das in der Regel im unterdurchschnittlichen Bereich lag (Brigstocke et al., 2008, S. 74).

2.2.2 Mathematische Entwicklungsverzögerung

Die o. g. Studien weisen darauf hin, dass sich eine Trisomie 21 negativ auf die Entwicklung des mathematischen Verständnisses auswirkt. Im Folgenden wird diese Beobachtung anhand einer größeren Stichprobe geprüft.

Im Rahmen der *Aufmerksamkeitsstudie zur Verbesserung des Lernerfolgs von Menschen mit einer Trisomie 21* wurden mit allen Teilnehmenden, die eine entwickelte Objektpermanenz aufwiesen, ein Experiment zur Zahlbegriffsentwicklung durchgeführt. Die Kriterien bei der Entwicklung des Experiments umfassten eine kurze Dauer, damit es im Rahmen der Untersuchung aller Teilnehmenden implementiert werden konnte sowie eine Reproduzierbarkeit, um eine genügend große Aussagekraft um die mathematische Entwicklungsverzögerung, die mit einer Trisomie 21 einhergeht, anhand einer großen Stichprobe nachzuweisen. Die These zu dieser Untersuchung lautet: *Die Versuchsgruppe der Trisomie-21-Studie zeigt im Vergleich zur Kontrollgruppe in allen Altersbereichen ein durchschnittlich geringeres mathematisches Verständnis.*

2.2.2.1 Entwicklungspsychologischer Hintergrund

In seiner Konzeption ist das Experiment an den Untersuchungen von Piaget und Szeminska (1975) zur Zahlbegriffsentwicklung angelehnt. Jean Piaget wird eine zentrale Rolle in der Erforschung der kognitiven Entwicklung des Kindes zugesprochen (Eckhard, 2013, S. 71). Obgleich seine Theorien und Erkenntnisse im Laufe der letzten Jahrzehnte in Teilen konkretisiert oder falsifiziert worden sind, stellen seine Überlegungen zur Zahlbegriffsentwicklung nach wie vor das Fundament vieler mathematikdidaktischer Überlegungen dar (vgl. Krauthausen, 2018, S. 183). Piagets Überlegungen zur Bedeutung der Kardination und Ordination finden sich beispielsweise in den Zahlaspekten und Zählprinzipien wieder, die in der Didaktik des mathematischen Anfangsunterrichts eine große Rolle spielen (Krauthausen, 2018, S. 44, 49). Besondere Bekanntheit erlangten allerdings Piagets Experimente zur Invarianz, da er deren Ergebnisse eine große Aussagekraft

hinsichtlich der kognitiven Entwicklung einer Person zusprach. Personen, die bei diesen Experimenten korrekt antworten, haben laut Piaget einen Meilenstein in der geistigen Entwicklung erreicht: Sie sind in der Lage, sog. *Operationen* durchzuführen. Sodian (2002, S. 439) erklärt in diesem Zusammenhang: „Mit dem Begriff der Operation (im Sinne einer internalisierten Handlung) meint Piaget die Möglichkeit, interne Repräsentationen mental zu manipulieren".

Piagets Forschungsgruppe konzipierte verschiedene Experimente zur Erhaltung von kontinuierlichen Quantitäten (wie z. B. Flüssigkeiten) oder diskontinuierlichen Quantitäten (wie z. B. Perlen). In einem Experiment zur Invarianz von Volumen werden der Untersuchungsperson (bei Piaget handelt es sich dabei in aller Regel um Kinder) zwei gleichartige Gläser, befüllt mit der gleichen Menge an Flüssigkeit mit blauer und roter Färbung, präsentiert. Dem Kind wird erklärt, dass das Glas mit roter Flüssigkeit für ihn sei und das Glas mit blauer Flüssigkeit für ein anderes Kind. Es wird gefragt, ob jeder von ihnen gleich viel zu trinken habe. Danach wird vor den Augen des Kindes die rote Flüssigkeit des einen Glases in zwei kleinere umgefüllt. Daraufhin wird das Kind erneut gefragt, ob beide Kinder gleich viel zu trinken hätten. Kinder, die die Invarianz von Flüssigkeiten noch nicht verinnerlicht haben, antworten, dass sie mehr zu trinken hätten als das andere Kind (Piaget & Szeminska, 1975, S. 17, 19).

In einer anderen Form dieses Experiments wird der Inhalt eines Glases komplett in ein anderes Glas umgegossen, das entweder deutlich dicker oder dünner ist. Kinder, die sich vom veränderten Wasserstand nicht verunsichern lassen, sondern auch die Breite des Glases mitberücksichtigen, haben die Invarianz von Volumen verinnerlicht und sind sich der Reversibilität der Handlung des Umfüllens bewusst (Piaget & Inhelder, 1986, S. 101) (Abbildung 2.1).

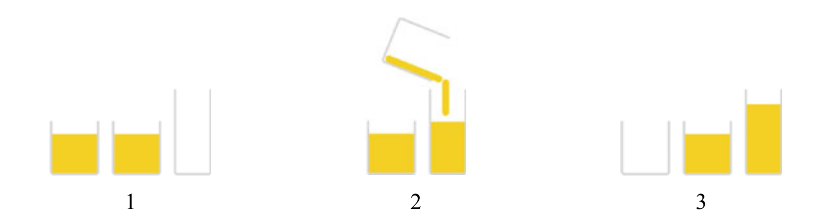


Abbildung 2.1 Alternatives Experiment zur Invarianz von Flüssigkeiten (vgl. Sodian, 2002, p. 440)

Um das Verständnis für die Invarianz von kontinuierlichen Quantitäten bei Kindern experimentell zu bestimmen, arbeiteten Piaget und Inhelder (1986, S. 40)

neben Flüssigkeiten auch mit Ton: Vor dem Kind wird eine von zwei gleichgroßen und -schweren Tonkugeln verformt. Nun wird das Kind befragt, ob Gewicht, Menge, Materie und Volumen gleichgeblieben seien. Mithilfe von Perlen kann nach Piaget und Szeminska (1975, S. 42 ff.) die Invarianz diskontinuierlicher, also leicht zählbarer Quantitäten thematisiert werden. Der Vorteil des Materials besteht darin, dass sich Perlen einerseits für Umfüll-Experimente eignen, aber auch nachgezählt oder als Ketten aufgefädelt werden können.

Im Experiment im Rahmen der vorliegenden Untersuchung wurden gedruckte Punkte als diskontinuierliche Quantität herangezogen. Auf diese Weise konnte der Anforderung Rechnung getragen werden, das Experiment zeitsparend und reproduzierbar zu gestalten.

2.2.2.2 Verlauf des Experiments

Im Vorfeld der Durchführung wurde sichergestellt, dass die jeweilige Untersuchungsperson eine entwickelte Objektpermanenz aufwies. War dies nicht der Fall, wurde die Untersuchung nicht durchgeführt und die Aufgaben als *nicht bestanden* bewertet. Bei vorhandener Objektpermanenz wurden die folgenden drei Aufgaben gestellt. Sobald der Untersuchungsperson ein Fehler unterlief, wurde die Untersuchung beendet. Nur bei vollständiger Durchführung und wenn alle Antworten korrekt gegeben wurden, galt die Aufgabenstellung als bestanden.

Aufgabe 1: Zu Beginn wurden acht Karten, bedruckt mit den Ziffern 1 bis 8, vor der Untersuchungsperson auf dem Tisch ausgebreitet. Die Untersuchungsperson wurde daraufhin gefragt, ob sie eine Zahl wiedererkenne. Nachdem sie auf eine Ziffer gezeigt und ihre Bezeichnung genannt hatte, wurde sie darum gebeten, die Ziffern in die richtige Reihenfolge zu bringen.

Aufgabe 2: Im nächsten Schritt wurden acht Karten auf den Tisch gelegt, die jeweils einen bis acht ungeordnete Punkte zeigten. Der Untersuchungsperson wurde exemplarisch eine Karte gezeigt. Sie wurde gefragt, um wie viele Punkte es sich handele. Antwortete sie korrekt, wurde sie darum gebeten, alle Punktkarten den passenden Ziffernkarten zuzuordnen (Abbildung 2.2).

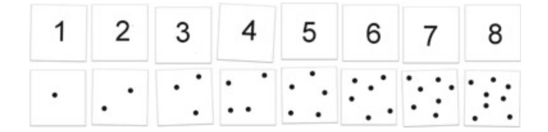


Abbildung 2.2 Korrekt angeordnete Kärtchen aus den Aufgaben 1 und 2

Aufgabe 3: In einem weiteren Schritt wurde der Untersuchungsperson folgende Karte vorgelegt (Abbildung 2.3)



Abbildung 2.3 Erste Karte Aufgabe 3 im Experiment zur Zahlbegriffsentwicklung

Dabei wurde sie gefragt, auf welcher Seite mehr Punkte zu sehen seien oder ob es sich um gleich viele Punkte handele. Danach wurde der Untersuchungsperson folgende Karte vorgelegt (Abbildung 2.4)



Abbildung 2.4 Zweite Karte Aufgabe 3 im Experiment zur Zahlbegriffsentwicklung

Erneut wurde sie gefragt, auf welcher Seite mehr Punkte zu sehen seien oder ob es sich um gleich viele Punkte handele. Im letzten Schritt wurde der Untersuchungsperson noch folgende Karte vorgelegt (Abbildung 2.5)



Abbildung 2.5 Dritte Karte Aufgabe 3 im Experiment zur Zahlbegriffsentwicklung

Wieder wurde sie gefragt, auf welcher Seite mehr Punkte zu sehen seien oder ob es sich um gleich viele Punkte handele. War die Untersuchungsperson der Meinung, dass auf beiden Seiten der letzten Karte gleich viele Punkte zu sehen seien, galt die Aufgabenstellung als bestanden. Ein solches Ergebnis ist ein Hinweis darauf, dass die Person bereits die Fähigkeit entwickelt hat, die Invarianz von diskontinuierlichen Quantitäten zu erkennen.

2.2.2.3 Ergebnisse der ersten Auswertung

Die Resultate dieses Experiments wurden bereits in der Vergangenheit veröffentlicht (vgl. Rieckmann, 2016, S. 168 f.). Sie bilden eine Entwicklungsverzögerung

bei den Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 (n = 1284) im Vergleich zu den neurotypischen Untersuchungspersonen (n = 624) ab (Abbildung 2.6).

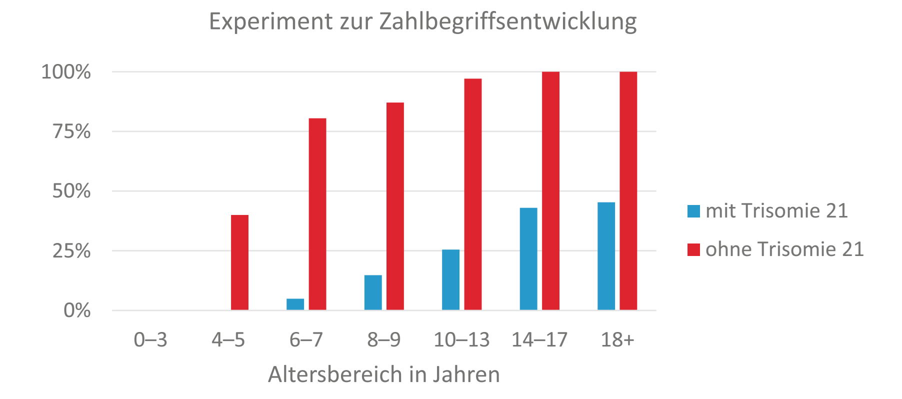


Abbildung 2.6 Ergebnisse des Experiments aufgeschlüsselt nach Altersbereich und prozentualem Anteil der Untersuchungspersonen einer Gruppe, die die Aufgaben fehlerfrei bewältigten (vgl. Rieckmann, 2016, S. 168)

Im Altersbereich von vier bis fünf Jahren bewältigten 40 % der Untersuchungspersonen ohne Trisomie 21 alle Aufgaben. Mit 43 % erreichten die Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 hingegen erst im Altersbereich von 14 bis 17 Jahren einen ähnlichen Wert. Ab dem Alter von 14 Jahren durchliefen alle Untersuchungspersonen ohne Trisomie 21 die Aufgaben ohne Fehler. Von allen volljährigen Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 absolvierten 45 % die Aufgaben fehlerfrei. Folgende These konnte demnach bereits verifiziert werden: *Die Versuchsgruppe der Trisomie-21-Studie zeigt im Vergleich zur Kontrollgruppe in allen Altersbereichen ein durchschnittlich geringeres mathematisches Verständnis.*

2.2.2.4 These zur zweiten Auswertung

Offenkundig scheint die Trisomie 21 einen Effekt auf das Abschneiden im Experiment zu haben. Um diese Effektstärke nachzuweisen und zu beziffern, ist gleichwohl eine erneute Aufbereitung der Daten erforderlich. Die These für die erneute Auswertung der Daten lautet: *Untersuchungspersonen ohne Trisomie 21 absolvierten die Aufgaben zum Zahlbegriff signifikant häufiger fehlerfrei als Untersuchungspersonen mit Trisomie 21.*

2.2.2.5 Stichprobe

In den vorliegenden Daten weisen die Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 einen Altersdurchschnitt von 13;3, die der Kontrollgruppe von 17;10 Jahren auf. Bei der Bestimmung der Effektstärke einer Trisomie 21 auf das Abschneiden bei den Aufgaben zum Zahlbegriff besteht durch das höhere Durchschnittsalter der Kontrollgruppe die Gefahr, das Ergebnis zu verfälschen, da die Zahlbegriffsentwicklung mit dem Altersverlauf korreliert. Aus diesem Grund wird zur folgenden Ermittlung der Effektstärke lediglich der Altersbereich 5;0 bis 17;11 Jahre herangezogen. Es verbleibt demnach eine Stichprobe aus 1053 Untersuchungspersonen mit einem Durchschnittsalter von 10;6 Jahren. Bei 730 dieser Untersuchungspersonen wurde eine Trisomie 21 diagnostiziert. Sie bilden die Versuchsgruppe mit einem Durchschnittsalter von 10;7 Jahren. Die Kontrollgruppe besteht aus 323 neurotypischen Untersuchungspersonen mit einem Altersdurchschnitt von 10;3 Jahren. Der Altersdurchschnitt der Kontrollgruppe liegt damit unterhalb dem der Versuchsgruppe. Eine Verfälschung der Ergebnisse durch das Lebensalter zugunsten der Kontrollgruppe kann damit ausgeschlossen werden.

Die Untersuchungspersonen der Versuchsgruppe wurden größtenteils mithilfe von Elternvereinen ausfindig gemacht, die sich auf das Thema Trisomie 21 spezialisiert und eigens für die Studie Aufrufe gestartet haben. Viele Untersuchungen fanden in den Räumlichkeiten der Universität Hamburg statt, die meisten allerdings an verschiedenen Orten insbesondere in der Bundesrepublik Deutschland, Österreich und der Schweiz. Die Kontrollgruppe setzt sich aus Geschwistern der Personen aus der Versuchsgruppe und Schüler*innen aus Hamburg zusammen.

2.2.2.6 Statistische Analyse

Zur statistischen Analyse der Daten wurde der Mann-Whitney-U-Test verwendet. Es gab einen signifikanten Unterschied bezüglich des Abschneidens bei den Aufgaben zum Zahlbegriff zwischen den Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 ($M_{\text{Rang}} = 414{,}68$) und den neurotypischen Untersuchungspersonen ($M_{\text{Rang}} = 780{,}84$), $U = 35905$, $Z = -21{,}083$, $p < 0{,}001$, $r = 0{,}65$.

2.2.2.7 Interpretation

Die Effektstärkte wurde als Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient ermittelt: $r = 0{,}65$. Cohen (1988, S. 78) spricht ab einem Wert von $r = 0{,}5$ von einer starken Korrelation. Folgende These konnte verifiziert werden: *Untersuchungspersonen ohne Trisomie 21 absolvierten die Aufgaben zum Zahlbegriff signifikant häufiger fehlerfrei als Untersuchungspersonen mit Trisomie 21.*

2.2.2.8 Ergebnis und Diskussion

Die Entwicklungsverzögerung im mathematischen Bereich bei Trisomie 21 konnte in diesem Experiment mit einer großen Stichprobe bestätigt werden. Hierbei handelt es sich allerdings um den Durchschnitt aller Untersuchungspersonen. Liegt das Augenmerk auf einzelnen Personen, zeigt sich eine heterogene Lernentwicklung bei Trisomie 21: Während vier neunjährige Untersuchungspersonen der Kontrollgruppe die Aufgaben nicht korrekt gelöst haben, gibt es 20 sechsjährige Teilnehmende mit Trisomie 21, die ein Verständnis für die Seriation, Ordination, Kardination und Invarianz entwickelt haben. Im Vergleich zu den vier neurotypischen Neunjährigen sind diese bezogen auf die Kenntnisse, die dieses Experiment erfordert, kognitiv weiter entwickelt. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache scheint es nicht angemessen, diese Personen als „entwicklungsverzögert“ oder gar „geistig behindert“ zu bezeichnen.

2.3 Zur Problematik des Bildungsschwerpunkts „geistige Entwicklung“

Angesichts der Erkenntnisse aus der Analyse der Daten des o. g. Experiments stellt sich die Frage, ob die Behauptung aufrechterhalten werden kann, mit einer Trisomie 21 gehe regelmäßig eine geistige Behinderung einher. In Deutschland haben Schüler*innen mit geistigen Behinderungen einen Anspruch auf eine sonderpädagogische Förderung, die ihnen mit der Diagnose des „sonderpädagogischen Förderbedarfs im Schwerpunkt geistige Entwicklung“ zugesprochen wird (Kultusministerkonferenz, 1994, 1998a). Diese Praxis ist gleichwohl umstritten: Ziemen bemängelt etwa, dass diese Fokussierung auf die vermeintliche Abweichung von der Norm administrativer Natur und weitgehend unkritisch in den Kanon der Sonder- und Heilpädagogik aufgenommen worden sei. Eine wissenschaftliche Debatte sei bisher ausgeblieben (Ziemen, 2018, S. 22). Die Diagnostik dieses Förderbedarfs findet traditionell unter Zuhilfenahme von Intelligenzmessung statt: „Die durchschnittliche Punktzahl eines IQ-Tests ist üblicherweise mit hundert und die Standardabweichung mit fünfzehn Punkten festgelegt. Geistige Behinderung entspricht hier einem Wert unter einer zweifachen Standardabweichung nach Links (IQ < 70)“ (Zimpel, 2017b, S. 85).

In jüngster Vergangenheit ist diese Praxis vermehrt in die Kritik geraten, weil der Förderbedarf *geistige Entwicklung* bei falscher Diagnostik Bildungsabschlüsse verhindern und einen negativen Einfluss auf die Lebensgestaltung haben kann. So wurde dem Schüler Nenad mit sieben Jahren aufgrund eines einmaligen Intelligenztests der sonderpädagogische Förderbedarf *geistige Entwicklung*

diagnostiziert. Er wurde daraufhin an einer Förderschule mit diesem Schwerpunkt eingeschult. Eine erneute Überprüfung der Diagnose wurde während seiner Schullaufbahn versäumt, obwohl Nenad grundsätzlich in der Lage gewesen wäre, einen regulären Schulabschluss zu erlangen (vgl. Schroeder & Schulz, 2018).

Am *Zentrum für Aufmerksamkeitsbesonderheiten*, einer Beratungsstelle der Universität Hamburg, arbeitete der Autor regelmäßig mit zwei Lernenden mit Trisomie 21, bei denen statt des Förderschwerpunkts *geistige Entwicklung* die Förderschwerpunkte *Lernen* und *Sprache* diagnostiziert wurden (vgl. Kultusministerkonferenz, 1998b, 2019). Im Gegensatz zum Förderschwerpunkt *geistige Entwicklung* orientiert sich laut Kultusministerkonferenz die „Schulische Bildung im Schwerpunkt LERNEN … in den Unterrichtsfächern hinsichtlich der Inhalte und der Bildungsziele an denen der allgemeinen Schule“ (Kultusministerkonferenz, 2019, S. 3). Des Weiteren sei sicherzustellen, „ … dass Schülerinnen und Schüler mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Schwerpunkt LERNEN den individuell für sie höchstmöglichen Schulabschluss erreichen“ (Kultusministerkonferenz, 2019, S. 3). Die Diagnose des Förderbedarfs *Lernen* entspricht nicht der Diagnose einer geistigen Behinderung, stattdessen ist sie Ausdruck der Vorstellung einer sog. „Lernbehinderung“, die in dieser Form in Deutschland einzigartig ist (Schumann, 2018, S. 20).

Gegen die These, dass Menschen mit Trisomie 21 grundsätzlich eine geistige Behinderung haben, sprechen außerdem aufsehenerregende Bildungsbiografien einzelner Personen mit Trisomie 21. Zimpel (2016, S. 78 f.) berichtet etwa von Aya Iwamoto, die 1998 englische Literatur studierte und heute Bücher übersetzt, Pablo Pineda, der 1999 ein Studium der Erziehungswissenschaft absolvierte und heute als Buchautor und Schauspieler tätig ist, Francesco Aglio, der 2007 sein Wirtschaftsstudium absolvierte und heute als Wirtschaftsberater tätig ist, Ángela Bachiller, die 2013 Stadträtin von Valladolid wurde, und Karen Gaffney, die 2013 die Ehrendoktorwürde an der Columbia University in Portland erhielt.

Diese Beispiele von Personen mit Trisomie 21, die auch im Vergleich zu neurotypischen Personen überdurchschnittliche Bildungserfolge aufweisen, reichen aus, um festzustellen, dass eine Trisomie 21 nicht a priori zu einer sog. geistigen Behinderung führt. Offen bleibt aber die Frage, worin die Besonderheiten bei einer Trisomie 21 liegen, die dazu führen, dass es häufig zu einer kognitiven Entwicklungsverzögerung kommt. Eine mögliche Antwort wäre, dass Menschen mit Trisomie 21 unsere Umwelt auf eine radikal andere Weise verarbeiten und ihre Form des Lernens von den neurotypischen Personen abweicht. Für diese These sprechen Erfahrungen im Mathematikunterricht, die im folgenden Abschnitt behandelt werden.

2.4 Neues Verständnis eines geeigneten Mathematikunterrichts

Auf die mathematischen Lernschwierigkeiten, die häufig mit einer Trisomie 21 einhergehen, wurde bisher in der Regel mit der Entwicklung neuer Unterrichtsmaterialien und -methoden reagiert, die Lernenden mit Trisomie 21 die Arithmetik näherbringen sollten (vgl. dazu Unterkapitel 6.2). Ein Ansatz, der einen gänzlich anderen Weg verfolgt und bis heute in der internationalen wissenschaftlichen Auseinandersetzung zur Mathematikdidaktik für Lernende mit Trisomie 21 rezipiert wird (vgl. Faragher, 2017; Gil Clemente & Cogolludo-Agustín, 2019), nimmt indes eine Neubewertung der Bedeutsamkeit der Arithmetik als Teilgebiet der Mathematik vor. Nach Monari Martinez (2002, S. 22) herrscht die Ansicht, dass arithmetische Fähigkeiten die Basis allen mathematischen Wissens darstellen, da der schulische Mathematikunterricht in der Regel mit der Thematisierung von Zahlen und Operationen beginnt. Diese Vorstellung von Mathematik ist im alten Mathematik-Baum dargestellt, in dem Zahlen und Operationen den Stamm bilden (Abbildung 2.7). Monari Martinez negiert die Bedeutung der Arithmetik in der Mathematik nicht, merkt aber an, dass es noch weitere Teilgebiete gebe, die zufriedenstellend im Unterricht behandelt und gelernt werden könnten. Insbesondere Problemlösungskompetenzen, Algebra, Diagramme, Geometrie und das Messen würden bedeutende Elemente der Mathematik darstellen, die zu selten im Unterricht für Lernende mit Trisomie 21 vorkämen. Diese sind als Äste im neuen Mathematik-Baum aufgeführt (Abbildung 2.7). Den Stamm bilden Mengen, das Zählen und Operationen. Das Kopfrechnen wird ebenfalls als einzelner Ast dargestellt. Die Arithmetik ist in diesem neuen Verständnis also nicht mehr alleinige Basis des Mathematikunterrichts. Rote Markierungen deuten auf Schwierigkeiten hin, die im Messen, beim Problemlösen, Kopfrechnen und Zählen sowie bei Operationen auftreten können. Sie sind von stilisierten Flicken überklebt, die auf Nachteilsausgleiche hindeuten, die in diesen Bereichen greifen: Empfohlen wird die Arbeit mit dem Lineal, Taschenrechner, Visualisierungen und zählbaren Objekten, um Defizite in den arithmetischen Fähigkeiten zu kompensieren (Monari Martinez, 2002).

Monari Martinez entwickelte dieses alternative Modell eines Mathematikunterrichts in den 1990er-Jahren anhand ihrer Erfahrungen an italienischen Schulen (Monari Martinez & Rieckmann, 2019). Bereits 1977 wurden in Italien annähernd alle Förderschulen geschlossen und Schüler*innen mit Behinderung, die die Elementar- oder Mittelstufe besuchten, wurden an den Regelschulen aufgenommen. 1992 folgte eine Ausdehnung des gemeinsamen Unterrichts auf die Sekundarschulen, die dazu führte, dass seitdem nahezu alle Schüler*innen im

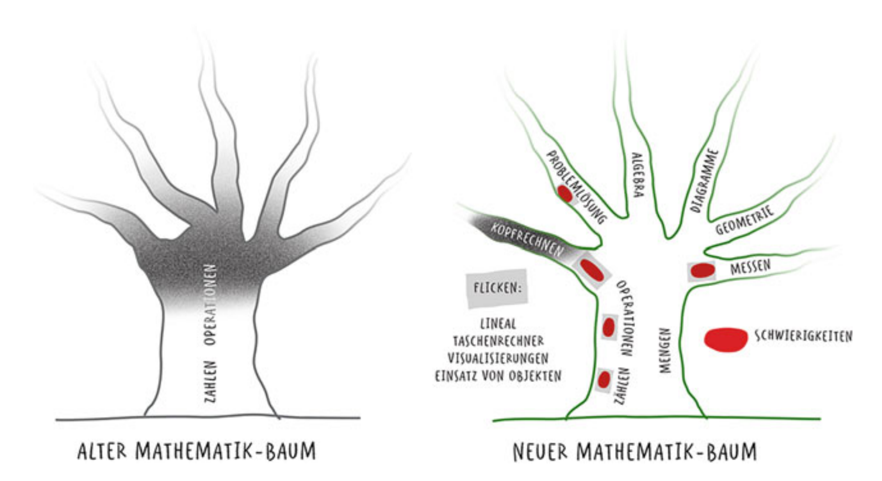


Abbildung 2.7 Alter und neuer Mathematik-Baum (Monari Martinez, 2002; Monari Martinez & Rieckmann, 2019). Zeichnung: Wolfgang Halder

Alter von drei bis 19 Jahren an italienischen Schulen unabhängig von der Ausprägung ihres Unterstützungsbedarfs inklusiv unterrichtet werden (Cottini & Nota, 2007, S. 143 ff.). In diesem inklusiven Lernumfeld beobachtete Monari Martinez (1998), dass 15-jährige Schüler*innen mit Trisomie 21 an Sekundarschulen das Bedürfnis äußerten, die gleichen Lerninhalte wie ihre neurotypischen Mitschüler*innen zu bearbeiten. Für diese Schüler*innen entwickelte sie individuelle Lernprogramme, die sich mit Algebra befassten. Sie formulierte fünf Argumente, die für einen algebraischen Unterricht sprechen:

- Lernende mit Trisomie 21 werden befähigt, sich in einem mathematischen Lernfeld zu bewegen, mit dem sich ihre Peers beschäftigen. Dies hat einen positiven Einfluss auf den Umgang miteinander und das Selbstbewusstsein.
- Das Lösen algebraischer Gleichungen folgt einem flexiblen, logischen Plan, dem Schüler*innen mit Trisomie 21 bei genügend Übungszeit folgen können.
- Algebra folgt einer formalen, klaren und unmissverständlichen Sprache und kommt damit der Denkweise von Personen mit Trisomie 21 entgegen.
- Das Ergebnis einer algebraischen Gleichung ist entweder eindeutig korrekt oder falsch, was Lernenden mit Trisomie 21 Sicherheit vermittelt.
- Algebra ist eine effektive Möglichkeit, logische Fertigkeiten zu üben, und kann einen der ersten Schritte in die Kultur der Mathematik darstellen.

2.4.1 Mathematische Problemstellungen mit Gleichungen lösen

Monari Martinez entwickelte gemeinsam mit Kolleginnen ihres Forschungsteams mehrere didaktische Ansätze, die an dieser Stelle jedoch nicht umfassend abgebildet werden können. Exemplarisch wird im Folgenden Monari Martinez‘ und Pellegrinis (2010) Herangehensweise zur Vermittlung von Problemlösestrategien dargestellt.

Beispielhaft sind folgende Problemstellungen gegeben:

a) In einem Klassenraum mit 30 Kindern sind 40 % Jungen. Wie viele Jungen sind im Klassenraum?
b) In einem Klassenraum sind 12 Jungen. Sie sind 30 % aller Kinder. Wie viele Kinder sind im Klassenraum?
c) In einem Klassenraum mit 30 Kindern sind 12 Jungen. Wie hoch ist der Anteil der Jungen im Klassenraum?

Jemand, der die Absicht hat, diese Problemstellungen arithmetisch zu lösen, müsste drei verschiedene Formeln erinnern:

a) Prozentwert = (Prozentsatz: 100) · Grundwert
b) Grundwert = Prozentwert · 100 : Prozentsatz
c) Prozentsatz = Prozentwert · 100 : Grundwert

Monari Martinez und Pellegrini (2010) schlagen vor, solche Problemstellungen mit algebraischen Gleichungen zu lösen. Der Vorteil dieser Vorgehensweise besteht darin, dass lediglich eine Formel erinnert werden muss:

Prozentwert = (Prozentsatz: 100) · Grundwert

Es muss lediglich erkannt werden, welche Variablen gegeben sind und welche Variable noch unbekannt ist. Dann kann die Formel in allen drei Fällen verwendet werden:

a) $x = (40: 100) \cdot 30$
b) $12 = (40: 100) \cdot x$
c) $12 = (x: 100) \cdot 30$

Aufgabe
Sechs Schüler einer Lerngruppe fehlen. Sie sind 25 % der gesamten Gruppe.
Wie viele Schüler gehören insgesamt zur Lerngruppe?

Schreibe eine geeignete Formel auf:

$$\frac{\text{Prozentsatz}}{100} \cdot \text{Grundwert} = \text{Prozentwert}$$

Kennzeichne die Unbekannte mit einem kleinen Viereck.

$$\frac{25}{100} \cdot \square = 6$$ Ich multipliziere beide Seiten mit 100.

$$^{1}\not{100} \cdot \frac{25}{^{1}\not{100}} \cdot \square = 6 \cdot 100$$ Ich dividiere beide Seiten durch 25.

$$\frac{^{1}\not{25}}{^{1}\not{25}} \cdot \square = \frac{600}{25}$$

$$\square = 24$$

Antwort:
In der Lerngruppe sind 24 Schüler.

Probe:

$$\frac{25}{100} \cdot 24 = 6$$

Abbildung 2.8 Übersetzung der Lösung einer mathematischen Problemstellung durch eine 14-jährige Schülerin mit Trisomie 21. Der Text in handschriftlicher Schriftart zeigt die Eintragungen der Schülerin (Baccarin, Benedetti & Monari Martinez, 2004, S. 190; Monari Martinez & Rieckmann, 2019, S. 36)

Der Fokus, der zuvor noch auf dem Inhalt der Problemstellung lag, liegt vorübergehend auf der Lösung der Gleichung. Erst, nachdem die Unbekannte ermittelt wurde, wird geprüft, ob der ermittelte Wert zur Aufgabenstellung passt. Der Problemlöseprozess ist demnach in mehrere Schritte unterteilt:

1. Einordnung des Problems und Ermitteln der passenden Formel
2. Vergegenwärtigen, welche Variablen bekannt und welche unbekannt sind
3. Einsetzen der Werte in die Formel und Aufschreiben der Gleichung
4. Lösen der Gleichung
5. Interpretation der Lösung im Kontext des ursprünglichen Problems und Prüfung, ob das Problem wirklich gelöst wurde

Monari Martinez und Pellegrini (2010) führten eine Studie mit 15 Lernenden mit Trisomie 21 im Alter von 13 bis 15 Jahren durch. Die Untersuchungspersonen wurden für ein halbes Jahr zweiwöchentlich von Pellegrini für zwei bis drei Stunden zuhause unterrichtet. Neben Brüchen, Prozentsätzen, algebraischen Gleichungen und physikalischen Formeln wurde auch der oben dargestellte Prozess zur Lösung mathematischer Problemlösungen unterrichtet (Monari Martinez & Pellegrini, 2010, S. 16). Ein Post-Test einen Monat nach der Intervention ergab, dass alle Lerninhalte weiterhin erinnert werden konnten. Außerdem ließen sich in allen Bereichen Lernerfolge während der Intervention verzeichnen (Monari Martinez & Pellegrini, 2010, S. 19 f.). Diese Ergebnisse bestätigten sich in einer nachfolgenden Studie mit sechs Jugendlichen mit Trisomie 21 im Alter von 14 bis 16 Jahren, die für neun Monate wöchentlich Einzelunterricht erhielten (Monari Martinez & Neodo, 2020, S. 7). Abbildung 2.8 zeigt beispielhaft die Bearbeitung einer Problemstellung mit Hilfe des Problemlöseprozesses von Monari Martinez und Pellegrini durch eine 14-Jährige mit Trisomie 21.

2.4.2 Einordnung

Monari Martinez und ihre Kolleginnen haben eine Vielzahl an Erfahrungen und Arbeiten von Schüler*innen in einem Mathematikunterricht gesammelt, der mathematische Teilgebiete abseits der Arithmetik zum primären Lerninhalt erklärt. Neben der Lösung algebraischer Gleichungen werden die Arbeit im kartesischen Koordinatensystem, das Lösen von Exponentialgleichungen und die Berechnung von Logarithmen behandelt (vgl. Monari Martinez & Neodo, 2020; Monari Martinez & Rieckmann, 2019). Diese Forschungstätigkeit erstreckt sich



Abbildung 2.9 Lösung einer Exponentialgleichung, die die Lösung einer algebraischen Gleichung zweiten Grades erforderte. Übersetzung: 1) Ich ersetze den Bruchstrich durch das Geteiltzeichen. 2) Ich forme die Wurzeln um. 3) Ich gleiche die Basen an. 4) Ich wende die Potenzgesetze an. 5) Ich eliminiere die Basen. (Monari Martinez & Benedetti, 2011; Monari Martinez & Rieckmann, 2019, S. 38)

in erster Linie über die Zeit in der Sekundarschule, die Schüler*innen in Italien in der Regel ab dem 15. Lebensjahr besuchen. Die Untersuchungspersonen hatten also bereits mehrere Schuljahre Erfahrungen mit arithmetischen Aufgabenstellungen gesammelt, bevor die pädagogische Intervention, die die Algebra

forciert, durchgeführt wurde. Die an der Universität Padua entwickelten Lernprogramme setzen ein Verständnis für Zahlen und die Grundrechenarten voraus. Dies wird auch in Abbildung 2.9 deutlich, die die Lösung einer Exponentialgleichung durch eine 18-Jährige mit Trisomie 21 zeigt.

Ohne ein grundlegendes Verständnis für den Umgang mit Zahlen und Rechenoperationen ist die Lösung einer solchen Gleichung, auch unter Verwendung eines Taschenrechners als Nachteilsausgleich, nicht denkbar. Um die Fähigkeiten zu erlangen, solche algebraischen Gleichungen zu lösen, sollte die Arithmetik also weiterhin im Mathematikunterricht vertreten sein. Monari Martinez‘ Forschungsergebnisse geben allerdings Anlass, Abstand von der Vorstellung zu nehmen, die mentale Bearbeitung von Rechenaufgaben in hohen Zahlenräumen sei eine Voraussetzung für die Arbeit in anderen Teilgebieten der Mathematik. Ihre Arbeit belegt, dass es sich aus pädagogischer Sicht lohnt, auf vielfältige Formen des Denkens und Lernens Rücksicht zu nehmen, diesen Anerkennung zu schenken und sie in der Unterrichtsplanung zu berücksichtigen.

2.5 Lernbesonderheiten verstehen

Es drängt sich die Frage auf, warum Menschen mit Trisomie 21, die Schwierigkeiten in der Arithmetik haben, unter Verwendung von Hilfsmitteln in der Lage sind, algebraische Gleichungen zu lösen. Die Ergebnisse von Monari Martinez und Kolleginnen legen nahe, dass die Form des Lernens von Menschen mit Trisomie 21 derart stark von den neurotypischen Personen abweicht, dass sogar algebraische Zusammenhänge besser gelernt werden können als arithmetische Aufgabenstellungen. Monari Martinez stellt fest, dass das Verwenden einer formalen Sprache, die Informationen kompakt und gebündelt darstellt, Lernenden mit Trisomie 21 entgegenkommt. Demnach scheint die Bündelung von Informationen beim Lernen unter den Bedingungen einer Trisomie 21 von Bedeutung zu sein.

Auf der Suche nach Regelmäßigkeiten in den mathematischen Lernschwierigkeiten von Personen mit Trisomie 21 führten King, Powell, Lemons und Davidson eine Review von acht Studien aus den Jahren 1989–2013 durch, die die mathematischen Fähigkeiten von insgesamt 135 Kindern und Jugendlichen mit Trisomie 21 zum Gegenstand hatten (2017, S. 213). Sie stellten fest, dass die mathematischen Lernschwierigkeiten in den Studien unterschiedlich charakterisiert werden und kein einheitliches Muster gefunden werden konnte. Daher sollte in zukünftigen Studien vermehrt syndromspezifische Besonderheiten berücksichtigt werden,

um ihre Verbindungen zu den mathematischen Lernschwierigkeiten zu erforschen (King et al., 2017, S. 218).

Sella, Lanfranchi und Zorzi (2013) überprüften, ob die mathematischen Lernschwierigkeiten von Personen mit Trisomie 21 mit der verzögerten Verarbeitung von Mengen zusammenhängen könnten. Die Versuchsgruppe ihrer Studie bildeten 21 Personen mit Trisomie 21 in einem Durchschnittsalter von 14;2 Jahren. Eine Kontrollgruppe wurde nach dem mentalen Alter der Versuchsgruppe gematcht (chronologisches Durchschnittsalter 5;4), eine weitere nach dem chronologischen Alter. Der Versuchsaufbau sah vor, dass der Untersuchungsperson auf einem Bildschirm für 0,2 s ein Bild mit Punkten unterschiedlicher Größe in den Anzahlen 1 bis 9 gezeigt wurde. Nach einem Störbild und einer kurzen Wartezeit wurde ein weiteres Punktmuster für 8 s präsentiert. Die Anzahl der Punkte entsprach entweder der des ersten Punktmusters oder wich von dieser um den Wert 1 ab. Die Untersuchungsperson sollte durch das Drücken einer Taste angeben, ob beide Punktmuster die gleiche Anzahl an Punkten gezeigt haben (ebd., S. 3800). Den Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 unterliefen bei der Unterscheidung von zwei und drei und der Unterscheidung von drei und vier Punkten signifikant häufiger Fehler als der Kontrollgruppe mit gematchtem mentalen Alter (ebd., S. 3802). Diese Ergebnisse deuten darauf hin, dass Personen mit Trisomie 21 Schwierigkeiten haben, Mengen zu verarbeiten, die normalerweise nicht gezählt werden müssen. Sella, Lanfranchi und Zorzi gehen davon aus, dass die mathematischen Lernschwierigkeiten von Personen mit Trisomie 21 auf eine Schwäche in diesen grundlegenden numerischen Fähigkeiten zurückzuführen sind (2013, S. 3805).

Zeitgleich zu den Forschungsarbeiten von Sella et al. fanden an der Universität Hamburg Untersuchungen zur Aufmerksamkeit von Menschen mit Trisomie 21 statt. Eine repräsentative Stichprobe wurde dabei ebenfalls auf die Fähigkeit der Mengenverarbeitung untersucht. Diese Studie, in deren Rahmen die vorliegende Arbeit entstanden ist, setzte sich zum Ziel, die Lernbesonderheiten von Personen mit Trisomie 21 zu spezifizieren, um daraufhin den Lernerfolg der betroffenen Schüler*innen fördern zu können.

2.6 Aufmerksamkeit

Der Begriff *Aufmerksamkeit* stellt einen zentralen Aspekt der besagten Studie und dieser Arbeit dar. Aus diesem Grund folgt eine Auseinandersetzung mit der Aufmerksamkeit als bio-psychischem Prozess und Forschungsgegenstand. Da der Umfang der Aufmerksamkeit von besonderer Bedeutung für das pädagogische

Problem ist, das den Anlass dieser Arbeit darstellt, wird dieser schwerpunktmäßig behandelt.

Die folgende Definition des Begriffs Aufmerksamkeit dient als Arbeitsdefinition. Sie stammt von André Frank Zimpel, der als Erziehungswissenschaftler mit Schwerpunkt Neurodiversitätsforschung regelmäßig auf die Bedeutung neurobiologischer Prozesse für das Lernen hinweist (vgl. Zimpel, 2010a). Aufmerksamkeit ist, so Zimpel, „Ausdruck der Gerichtetheit und Selektivität aller psychischen Prozesse. Sie bündelt die verfügbare Energie eines Nervensystems auf einen eng begrenzten Bereich einer Tätigkeit (…). Aus der Innensicht empfinden Menschen die mit der Fokussierung der Aufmerksamkeit einhergehende Steigerung des Stoffwechsels in bestimmten Hirnregionen in der Regel als Wachheit, Interesse oder Begeisterung. Müdigkeit und Lageweile entsprechen dagegen eher einem herabgesetzten Stoffwechsel" (2013a, S. 240).

Diese Definition enthält zwei Charakteristika der Aufmerksamkeit, die in der Theorie einzeln betrachtet werden können, aber in der Praxis grundsätzlich miteinander einhergehen: die Gerichtetheit sowie die Selektivität aller psychischen Prozesse.

Die Gerichtetheit von psychischen Prozessen beschreibt die bewusste und unbewusste Fokussierung auf ausgewählte Reize. Personen, die ihre Aufmerksamkeit bewusst ausdauernd einem Gegenstand zuwenden, werden als konzentriert beschrieben. Dieser Zustand wird auch als *Polarisation der Aufmerksamkeit* oder *Flow* bezeichnet. In der Entwicklungspsychologie wird der Gerichtetheit psychischer Prozesse für die kognitive Entwicklung und den Erfolg pädagogischer Angebote ein besonderer Wert zugesprochen. Zimpel (2011, S. 35) hebt deren Bedeutung insbesondere für das entwicklungsfördernde Spiel hervor, da hier die Erkenntnistätigkeit mit dem Bedürfnis des Gehirns nach genügend Anregung von außen verbunden sei. Spielen bezeichnet er als die effektivste Form des sozialen Lernens (Zimpel, 2014, S. 13).

Die Selektivität der psychischen Prozesse trägt der Tatsache Rechnung, dass die simultane (also gleichzeitige) Verarbeitung von Reizen begrenzt ist. Der Aufmerksamkeitsumfang, der diese Grenzen beschreibt, wurde in der Vergangenheit vorranging anhand von visuell dargestellten Mengen gemessen, betrifft aber auch die Verarbeitung von auditiven, taktilen und kinästhetischen Reizen (Röhm, 2016, S. 141 f, 2017; Zimpel & Röhm, 2018).

2.6.1 Polarisation der Aufmerksamkeit

Das ist offenbar der Schlüssel der ganzen Pädagogik;

diese kostbaren Augenblicke der Konzentration zu erkennen…

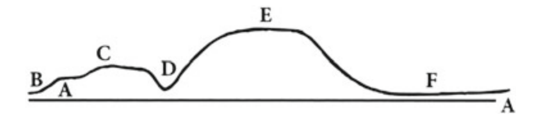
Maria Montessori (1983, S. 23)

Der Begriff *Flow* stammt aus der Glücksforschung (Csikszentmihalyi, 2019) und ist als Anglizismus in der deutsche Alltagssprache etabliert (Duden, 2020). Dieser Zustand kann in gewollten, aber risikoreichen Situationen (Nervenkitzel) aufkommen, aber auch bei meditativen Tätigkeiten. Laut Zimpel ist er dann erreicht, wenn „Handlung und Bewusstsein verschmelzen. Die Folge ist ein selbst- und weltvergessenes Aufgehen im Tätigsein" (2013a, S. 243).

Zur pädagogischen Bedeutung dieses Zustands forschte bereits die Reformpädagogin Maria Montessori. Sie beobachtete, dass sich Kinder, die sich in die Arbeit mit einem Lerngegenstand vertieft haben, auch durch bewusst herbeigeführte Störungen kaum ablenken ließen: „sie vertiefen sich in ihrer Übung mit so intensiver Aufmerksamkeit, dass sie die Dinge um sich herum gar nicht mehr wahrnehmen und immer weiter arbeiten und dabei die gleiche Übung dutzendmal wiederholen" (Montessori, 2012a, S. 118). Montessori bezeichnete diesen Zustand als „Polarisation der Aufmerksamkeit" und sprach ihm eine herausragende Bedeutung für das Gelingen pädagogischer Arbeit zu. Renner (1996, S. 139) beschreibt konzentriert arbeitende Kinder in Montessori-Kinderhäusern und -Grundschulen als beeindruckende Erfahrung. Er vertritt die These, Konzentration sei „ein (vielleicht das zentrale) pädagogische Grundphänomen", und hebt ihre Bedeutung insbesondere in der Montessori-Pädagogik hervor (ebd.). Damit schließt er sich Neuhaus an, die die Konzentration als Kernpunkt der Montessori-Pädagogik bezeichnet: „[D]urch die Konzentration auf eine Sache wird das Kind zu sich selbst geführt" (1967, S. 92).

Montessoris Auseinandersetzung mit dem Phänomen der Konzentration und der Polarisation der Aufmerksamkeit wird insbesondere in ihren Vorträgen deutlich (vgl. Montessori, 2014a, 2014b). 1915 erklärte sie zum Anlass eines Vortrages in Oakland anhand eines Schaubildes, welche Schwankungen die Aufmerksamkeit eines Kindes an einer Montessori-Einrichtung über den Tag idealerweise aufweist (Abbildung 2.10)

Abbildung 2.10
Schaubild der Arbeitsintensität eines Kindes über den Tag (Montessori, 2011a, S. 399)



Die untere Linie AA des Schaubilds stellt zur Orientierung gänzliche Ruhe dar, die darüber liegende kurvige Linie den Ablauf der Arbeit. Montessori (2011a, S. 399 f.) entwirft den folgenden idealen Tagesablauf eines Kindes in der vorbereiteten Umgebung einer Montessori-Schule: Von 9 bis 10 Uhr beginnt die erste Arbeitsphase (B und C) der Vorbereitung, die sie auch als „Arbeit der Unterhaltung“ bezeichnet. In dieser Phase wählt das Kind eine einfache Arbeit, die ihm bereits vertraut ist. Nach einer Pause (D) sucht sich das Kind eine herausfordernde Aufgabe, der es seine gesamte Aufmerksamkeit widmet und an der es intensiv arbeitet. Diese Phase der langandauernden Arbeit (E) nimmt laut Montessori 1,5 Stunden in Anspruch. Zuletzt schließt die nachdenkliche Haltung (F) an, in der das Kind gesellig wird und sich den Mitschüler*innen und der Lehrperson nähert. In einem späteren Vortrag im Jahr 1922 abstrahierte Montessori diesen Ablauf auf drei Phasen: „[D]ie ‚vorbereitende Phase‘, die ‚Phase der großen Arbeit‘, die mit einem Gegenstand der äußeren Welt im Zusammenhang steht, und eine dritte, die sich nur im Inneren abspielt und die dem Kinde Klarheit und Freude verschafft“ (Montessori, 2011b, S. 62).

2.6.2 Umfang der Aufmerksamkeit

Die ersten Bestrebungen zur Erforschung der Aufmerksamkeit lassen sich bereits in den Anfängen der wissenschaftlichen Psychologie verorten. Bereits Wilhelm Wundt (1911, S. 13) bemühte sich, den Umfang der Aufmerksamkeit von Personen zu messen. Dazu entwickelte er u. a. eine Buchstabentafel, die in einem geringen Abstand mittig zentriert betrachtet werden soll. Die Untersuchungsperson darf ihren Blick vom mittleren Buchstaben *o* nicht abwenden und soll alle weiteren Buchstaben benennen, die sie identifizieren kann (Abbildung 2.11).

Um zu messen, wie viele Buchstaben unmittelbar verarbeitet werden, wird zuvor ein weißer Schirm vor die Tafel geschoben, der lediglich einen Punkt in der Mitte zeigt. Die Untersuchungsperson wird nun angehalten, diesen Punkt mit einem Auge zu zentrieren und den Blick nicht abzuwenden, während sie das andere Auge geschlossen hält. Für einen kurzen Moment wird der Schirm ruckartig beiseite und dann wieder in die Ursprungsposition geschoben (Wundt,

Abbildung 2.11 Buchstabentafel zur Ermittlung des Aufmerksamkeitsumfangs (Wundt, 1911, S. 13)

				t	h	m				
		m	v	x	w	a	s	f		
	l	g	i	c	s	f	p	d	t	
z	r	a	e	n	p	r	h	v	z	l
r	f	u	c	t	h	f	b	n	d	s
k	h	e	p	n	o	t	v	b	s	i
n	z	l	u	v	r	k	m	d	g	n
d	i	n	i	w	g	e	t	v	r	f
	s	a	t	f	l	b	p	n	k	
		m	d	w	c	k	t	g		
			p	a	v	e	r			

1911, S. 15). Die Untersuchungsperson nennt die Buchstaben, die sie sich eingeprägt hat. In der Folge werden ihr auf gleiche Weise weitere Buchstabentafeln präsentiert. Wundt beobachtete, dass sich die Anzahl korrekt erkannter Buchstaben hierbei von anfänglich drei bis vier auf sechs ausweitete (1911, S. 16 f.). Da auch bei weiteren Durchführungen dieses Experiments die Anzahl sechs nicht überschritten wurde, betrachtet Wundt diesen Wert als „eine Konstante der Aufmerksamkeit für das menschliche Bewußtsein“ (1911, S. 17).

Kaufman, Lord, Reese und Volkmann entwickelten ein experimentelles Setting, in dem auf einer Leinwand für 200 ms eine Anzahl ungeordneter Punkte projiziert wurde (1949, S. 506) (Abbildung 2.12).

Den Untersuchungspersonen wurden auf diese Weise 1–15 Punkte sowie ausgewählte Punkt-Anzahlen bis 210 präsentiert (Kaufman et al., 1949, S. 504). In den Untersuchungen wurden bis zu sechs Punkte sicher benannt, danach sank die Genauigkeit der Antworten. Kaufman et al. gingen davon aus, dass ab der Anzahl von sieben Punkten geschätzt oder gezählt werden müsse. Für die Bestimmung von einem bis sechs Punkten schlugen sie das Verb *(to) subitize* vor, das sich an das lateinische Adjektiv *subitus* (plötzlich) und das lateinische Verb *subitare* (plötzlich erscheinen) anlehnt (Kaufman et al., 1949, S. 520). Das Substantiv *Subitizing* hat sich seitdem in der englischsprachigen Literatur etabliert. Im deutschsprachigen Raum werden in der Regel die Begriffe *simultane Anzahlerfassung* und *Simultanerfassung* verwendet (vgl. Sinner, 2016, S. 5).

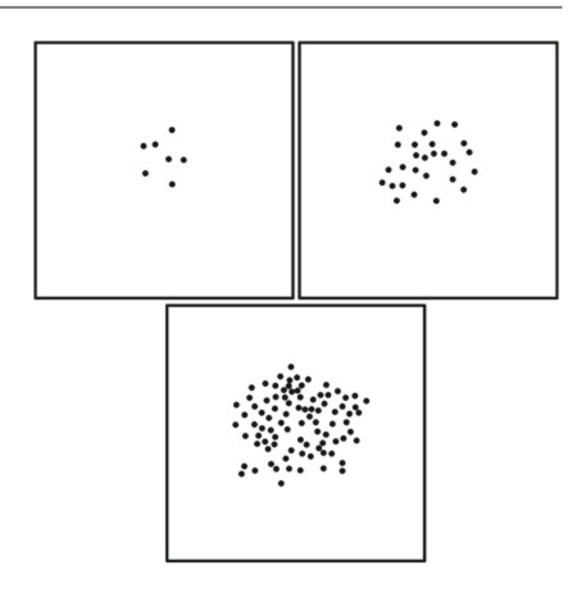


Abbildung 2.12 Stimulus Fields aus 7, 28 und 89 Punkten, die im Experiment einzeln projiziert wurden (Kaufman et al., 1949, S. 503)

Um präzisere Aussagen zu Messungen der Aufmerksamkeit tätigen zu können, schlug Miller (1956) die Bezeichnung *Chunk* (engl. für *Stück, Brocken, Klotz*) für eine elementare Informationseinheit vor. Er kam zu dem Ergebnis, dass die Grenze der Simultanerfassung bei sieben (+/− zwei) Chunks zu verorten sei und bezeichnete diese als „The magical number seven" (Miller, 1956, S. 98). Spätere Studien gehen allerdings von einem kleineren Aufmerksamkeitsumfang aus. Trick und Pylyshyn (1994) erklären beispielsweise, dass grundsätzlich mehr als vier Einheiten gezählt werden müssen, also außerhalb des Subitizing Limits liegen. Deheane und Cohen (1994, S. 961 f.) zeigten Untersuchungspersonen für 200 ms auf einem Bildschirm ein zufällig angeordnetes Punktmuster und baten sie darum, so schnell wie möglich die erkennbare Anzahl zu nennen. Dies gelang ihnen sicher bis zur Anzahl 3, ab der Anzahl 4 stieg die Fehlerrate leicht und verdoppelte sich mit der Anzahl 5. Cowan (2000) bestätigte das Subitizing Limit von vier Chunks in einer Meta-Studie und prägte die Bezeichnung „The magical number 4". Seine Ergebnisse wurden u. a. von Schneider und Deubel (2001) validiert.

Die meisten Menschen können demnach vier Chunks gleichzeitig verarbeiten. Zimpel (2012a, S. 35) wies in einer historischen Analyse zur Ziffernnotierung nach, dass sich das kulturelle Werkzeug Zahl in seiner Entwicklung am Aufmerksamkeitsumfang von vier Chunks orientierte (vgl. dazu Unterkapitel 3.3.1). In einer Analyse von Wahrscheinlichkeitsmustern von Buchstabenfolgen belegte er, dass dies ebenfalls für die Schriftsprache gilt (Zimpel, 2012a, S. 79 f.). Der Umfang der Aufmerksamkeit bestimmt demnach nicht nur die individuelle Verarbeitung der Umwelt eines Menschen, sondern auch deren Gestaltung. Kulturelle Werkzeuge wie Schriftsprache und Zahl, aber auch weitere Errungenschaften und Entwicklungen von und durch Menschen orientieren sich mutmaßlich an einem Umfang der Aufmerksamkeit von vier Chunks.

In verschiedenen Forschungsprojekten an der Universität Hamburg mit Lernenden mit Trisomie 21 beobachtete Zimpel (2016, S. 90) wiederholt, dass diese Mengen von drei bis vier Objekten abzählen und scheinbar nicht auf einen Blick erfassen können. Aus diesem Grund initiierte er eine Studie, die den Umfang der Aufmerksamkeit von Lernenden mit Trisomie 21 untersuchen sollte.

2.7 Experimente durch Computertachistoskopie

Zimpel konzipierte für die Studie mehrere Experimente und Experimentalreihen, die auf die Messung des visuellen, auditiven und taktilen Aufmerksamkeitsumfangs abzielten. Röhm (2017) ergänzte diese um eine Experimentalreihe zum kinästhetischen Aufmerksamkeitsumfang. Dieses Unterkapitel konzentriert sich auf die Experimente zum visuellen Aufmerksamkeitsumfang am Computertachistoskop, da diese für das vorliegende Forschungsprojekt von besonderer Bedeutung sind.

2.7.1 Voruntersuchung

Um den visuellen Aufmerksamkeitsumfang von Menschen mit Trisomie 21 zu messen und mit jenem von neurotypischen Personen zu vergleichen, entwickelte Zimpel das Forschungsinstrument *Computertachistoskop*. Das gewöhnliche Tachistoskop ist ein „Instrument der Wahrnehmungsforschung, das ermöglicht, ein Bild für beliebig kurze Zeit, z. B. Bruchteile von Sekunden, darzubieten" (Spektrum.de, 2000). Bei Zimpels Variante des Forschungsinstruments handelt es sich um eine Software, die auf dem PC verwendet werden kann und dem gleichen Zweck dient. Für jeweils 250 ms wird der Untersuchungsperson ein

Bild auf einem Display präsentiert. Ihre Aufgabe besteht nun darin, die Anzahl der Elemente des zuvor gesehenen Bildes zu benennen. Die Zeit zwischen den verschiedenen Bildern kann sie selbst bestimmen (Zimpel, 2013b, S. 39). Die ermittelte Anzahl trägt die Untersuchungsperson oder die Person, die die Untersuchung leitet, in eine Eingabemaske ein. Die Software zeichnet die Angaben auf und ermöglicht so eine nachträgliche Analyse der Antworten.

Mit Hilfe einer Voruntersuchung beabsichtigte Zimpel, die Eignung des Computertachistoskops zur Ermittlung des Aufmerksamkeitsumfangs (bzw. des Subitizing Limits) zu ermitteln. Die Stichprobe setzt sich aus 19 Personen mit Trisomie 21 in der Versuchsgruppe und 36 neurotypischen Personen in der Kontrollgruppe zusammen. Alle Untersuchungspersonen wiesen einen vollständig entwickelten Zahlbegriff nach Jean Piaget auf (Zimpel, 2013b, S. 38). In vier Experimenten wurden beiden Gruppen Schaubilder mit unterschiedlichen Charakteristika dargeboten. Im ersten Experiment kamen Interferenzbilder zum Einsatz. Dabei handelt es sich um Mengendarstellungen mit Teil-Ganzes-Gegensatz. Dies wird im folgenden Beispiel verdeutlicht. Die Menge 4 wird wie im Würfelpunktbild (Würfelaugen) dargestellt. Diese Darstellung wird wiederum nach dem Würfelpunktbild der 5 angeordnet (Abbildung 2.13).

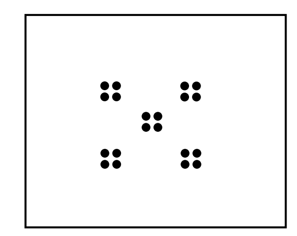


Abbildung 2.13 Beispiel für ein Schaubild aus dem Experiment Interferenzbilder (Zimpel, 2013b, S. 39)

Die Aufgabe der Untersuchungsperson besteht darin, die Menge als $4 \cdot 5$ oder $5 \cdot 4$ anzugeben. Neben diesem Beispiel werden 15 weitere Schaubilder gezeigt (siehe Anhang, S. 1 im elektronischen Zusatzmaterial).

In diesem Experiment wiesen die 19 Untersuchungspersonen der Versuchsgruppe signifikant häufiger Schwierigkeiten auf, Teil und Ganzes in Beziehung zu setzen, als die Kontrollgruppe. Das Schaubild $1 \cdot 3$ haben zehn Personen mit Trisomie 21 richtig benannt, das Schaubild $1 \cdot 4$ elf. Darüber hinaus haben sie nur vereinzelt korrekte Antworten gegeben. Von den 36 Untersuchungspersonen der Kontrollgruppe wurden deutlich häufiger korrekte Antworten verzeichnet. Die Anzahl der richtigen Antworten variierte je nach gezeigtem Schaubild zwischen 28 und 36 (Zimpel, 2013b, S. 41).

Im zweiten Experiment wurden Würfelpunktbilder dargeboten. Neben den gewöhnlichen Darstellungen der Mengen 1 bis 6 wurden folgende Darstellungen der Mengen 7 und 8 verwendet (Abbildung 2.14)

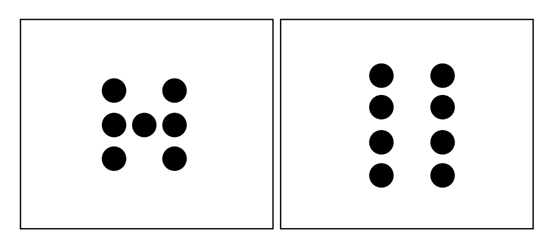


Abbildung 2.14
Darstellungen der Mengen 7 und 8 im Experiment Würfelpunktbilder (Zimpel, 2013b, S. 39)

Die Würfelpunktbilder 1 bis 8 wurden jeweils zwei Mal in zufälliger Reihenfolge gezeigt (siehe Übersicht im Anhang, S. 2 im elektronischen Zusatzmaterial). Bei der Anzahlnennung der klassischen Würfelpunktbilder mit einem bis sechs Punkten offenbarten weder Versuchs- noch Kontrollgruppe auffällige Schwierigkeiten. Die Benennung der Bilder mit sieben Punkten gelang allerdings nur vier Personen mit Trisomie 21, acht Punkte hat niemand von ihnen korrekt benannt (Zimpel, 2013b, S. 41 f.).

Die Schaubilder des dritten Experiments *Quadratwolken* erinnern an die Punktmuster von Kaufman et al. (1949). Die Quadrate wurden in der Planung des Experiments nach dem Zufallsprinzip angeordnet, ihre Anordnung blieb aber bei jeder Durchführung identisch, um eine Vergleichbarkeit zu gewährleisten (Abbildung 2.15).

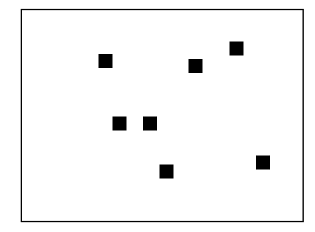


Abbildung 2.15
Schaubild des Bildes der 7 im Experiment Quadratwolken (Zimpel, 2013b, S. 40)

Auf diese Weise wurden die Mengen 1 bis 8 jeweils zweimal und die Mengen 9 bis 20 einmal in zufälliger Reihenfolge dargestellt (siehe Anhang, S. 3 im elektronischen Zusatzmaterial). Mehr als die Hälfte der Kontrollgruppe benannte die Anzahl von bis zu sechs Quadraten korrekt. Sieben Quadrate wurden lediglich von acht Personen korrekt benannt. In der Versuchsgruppe ließen sich bereits bei

der Anzahl von vier Quadraten Schwierigkeiten erkennen. Diese schätzten elf von 19 Personen korrekt ein. Fünf Quadrate wurden nur noch von fünf Personen korrekt benannt (Zimpel, 2013b, S. 42).

Im vierten Experiment wurden Schaubilder mit Strichreihen verwendet. Die einzelnen Striche hatten immer die gleiche Länge und erschienen parallel zueinander in der Mitte des Bildschirms. Je nach Anzahl variierte der Abstand zwischen den Strichen, der im einzelnen Schaubild aber stets gleichblieb (siehe Abbildung 2.16 und S. 4 im elektronischen Zusatzmaterial).

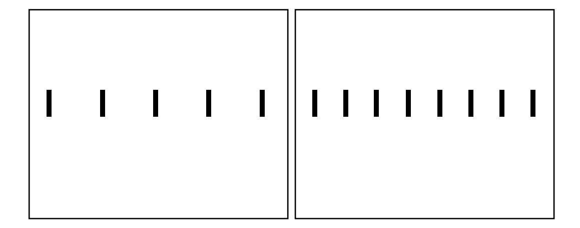


Abbildung 2.16
Schaubilder der 5 und der 8 im Experiment Strichreihen (Zimpel, 2013b, S. 41)

Auch in diesem Fall wurden Mengen bis 20 in den Schaubildern dargestellt. Die Mengen 1 bis 8 kamen in der zufällig geordneten Auswahl an Schaubildern doppelt vor. In diesem Experiment ließ sich der neurotypische Umfang der Aufmerksamkeit von vier Chunks am besten abbilden: Die 36 Untersuchungspersonen der Kontrollgruppe antworteten bis zur Anzahl von vier Strichen immer korrekt. Fünf Striche wurden von 28 Personen, sechs von 16 benannt. In der Versuchsgruppe wurden die Anzahlen 1 und 2 immer korrekt benannt. Die Anzahl von drei Strichen benannten 15 der 19 Untersuchungspersonen, vier Striche benannten sieben korrekt (Zimpel, 2013b, S. 43).

2.7.2 Repräsentative Stichprobe

Da die Ergebnisse der Voruntersuchung auf eine Eignung der Experimente am Computertachistoskop zur Ermittlung des Aufmerksamkeitsumfangs von neurotypischen Personen und Personen mit Trisomie 21 hinwiesen, wurden die Untersuchungen erneut mit einer größeren Stichprobe durchgeführt. In der Versuchsgruppe und in der Kontrollgruppe befanden sich Untersuchungspersonen im Schul- und Erwachsenenalter mit einem entwickelten Zahlbegriff. Die Versuchsgruppe bildeten 194 Personen mit Trisomie 21 im Alter von sechs bis 53 Jahren

(Durchschnitt: 19;5 Jahre). Als Vergleichsgruppe kamen 280 Personen ohne Trisomie 21 hinzu, darunter Eltern (32 %), Geschwister (15 %) und Schüler*innen (20 %) im Alter von sechs bis 82 Jahren (Durchschnittsalter 17;5) (Zimpel & Rieckmann, 2020).

Im Experiment *Würfelpunktbilder* konnten die Ergebnisse der Voruntersuchungen bestätigt werden; der Versuchsgruppe gelang nach wie vor die Nennung der Anzahlen 1 bis 6. Im Vergleich fiel ihr die korrekte Interpretation der nichtklassischen Würfelbilder 7 und 8 indes deutlich schwerer als der Versuchsgruppe (siehe Abbildung 2.17).

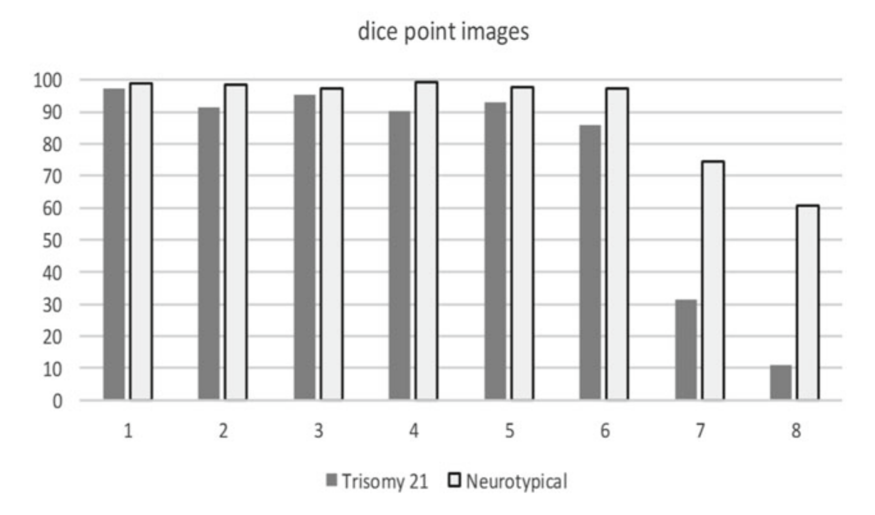


Abbildung 2.17 Relativer Anteil der korrekten Anzahlnennungen im Experiment Würfelpunktbilder. Abszisse: Anzahl der Punkte. Ordinate: Prozentsatz der Untersuchungspersonen mit drei korrekten Angaben zur Punktzahl. Versuchsgruppe (dunkler Balken) N = 194, Kontrollgruppe (heller Balken) N = 280. (Die Unterschiede sind statistisch hoch signifikant, mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von $p < 0{,}001$, Mann-Whitney-Test, Moses-Test, Kolmogorov-Smirnov-Test in zwei Proben und Wald Wolfowitz-Test.) (Zimpel & Rieckmann, 2020)

Im Experiment *Strichreihen* konnte, genau wie in der Voruntersuchung, die theoretisch erwartete Obergrenze von etwa vier Einheiten bei neurotypischen Untersuchungspersonen mit ausreichender Genauigkeit reproduziert werden. Die Häufigkeit der korrekten Nennungen der Anzahlen in der Versuchsgruppe nahm

nach zwei Einheiten leicht und nach drei Einheiten sehr deutlich ab (Abbildung 2.18).

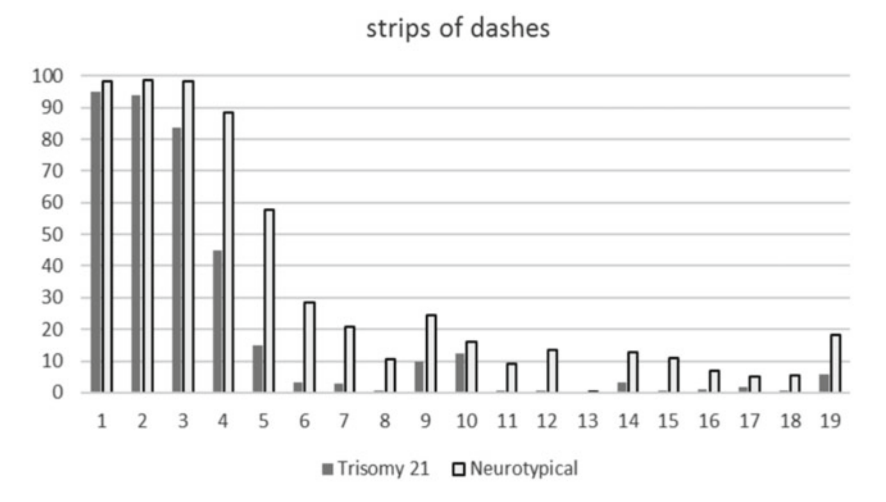


Abbildung 2.18 Relativer Anteil der korrekten Anzahlnennungen im Experiment Strichreihen. Abszisse: Anzahl der Striche. Ordinate: Prozentsatz der Personen mit korrekten Angaben zur Anzahl der Striche. Versuchsgruppe (dunkler Balken) N = 194, Kontrollgruppe (heller Balken) N = 280. (Die Unterschiede sind statistisch hoch signifikant, mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit von $p < 0{,}001$, Mann-Whitney-Test, Moses-Test, Kolmogorov-Smirnov-Test in zwei Proben und Wald Wolfowitz-Test.) (Zimpel & Rieckmann, 2020)

2.7.3 Zwei Formen der Simultanerfassung

Im Experiment *Würfelpunktbilder* konnten beide Gruppen größere Anzahlen korrekt benennen als im Experiment *Strichreihen.* Dies lässt sich mit einem qualitativen Unterschied in der Mengenerfassung bzw. -erkennung erklären. Würfelpunktbilder stellen eine spezielle Form von strukturierten Mengen dar, die den Untersuchungspersonen aus ihrem Lebensalltag bekannt vorgekommen ist. Aufgrund von Gesellschaftsspielen, die einen sechsseitigen Spielwürfel erfordern, und den Aufdrucken auf Dominosteinen sind diese in der Kindheit in unserer Gesellschaft omnipräsent. Einerseits zeigen die Würfelpunktbilder die Mengen als

Punkte, andererseits sind sie nach einer bestimmten Struktur angeordnet. Werden einige der Würfelaugen miteinander verbunden, ergeben sich bei den Mengen 2 und 3 eine Diagonale, bei der Menge 4 ein Quadrat, bei der Menge 5 ein Kreuz und bei der Menge 6 zwei parallele Linien. Abgesehen von den Anzahlen 2 und 3 sind demnach alle Anzahlen nach einer individuellen Regel angeordnet.

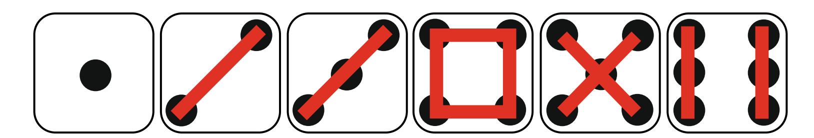


Abbildung 2.19 Würfelpunktbilder der Mengen 1 bis 6 mit hervorgehobener möglicher Strukturierung

Bei der Benennung der Würfelpunktbilder 4, 5 und 6 ist es nicht erforderlich, jeden einzelnen Punkt als einzelnen Chunk zu verarbeiten. Die einzige Information, die verarbeitet werden muss, ist ihre Struktur (siehe Abbildung 2.19). Diese Struktur ist ein Ersatzsymbol für die Menge; das Würfelpunktbild kann (mutmaßlich) als ein Chunk verarbeitet werden. Voraussetzung ist indes, dass die Regeln, auf denen die Würfelbilder basieren, bekannt sind. Diese Form des Subitizings wird als *Conceptual Subitizing* bezeichnet. Werden hingegen Chunks ohne helfende Struktur verarbeitet, wie im Experiment *Strichreihen*, handelt es sich um *Perceptual Subitizing* (vgl. Clements, 1999, S. 401). In der deutschsprachigen Mathematikdidaktik wird analog dazu zwischen *quasi-simultaner Anzahlerfassung* und *simultaner Anzahlerfassung* unterschieden (vgl. Sinner, 2016, S. 5).

Die Ergebnisse des Experiments *Würfelpunktbilder* zeigen, dass Menschen mit Trisomie 21 fähig sind, durch quasi-simultane Erfassung Anzahlen korrekt zu benennen, die ihren Aufmerksamkeitsumfang übersteigen. Damit unterscheiden sie sich nicht von der neurotypischen Kontrollgruppe. Letzterer gelang allerdings die korrekte Benennung der *falschen* Würfelpunktbilder 7 und 8 häufiger. Dieser Befund lässt sich vermutlich darauf zurückführen, dass den Untersuchungspersonen dieser Gruppe mehr Kapazitäten in der Aufmerksamkeit zur Verfügung stehen, um die Unterschiede dieser speziellen und zuvor unbekannten Bilder zu den gelernten klassischen Würfelbildern zu erkennen.

2.7.4 Superzeichen

Bei Würfelpunktbildern handelt es sich um eine besondere Form eines Zeichens, die an dieser Stelle definiert werden soll. Der Begriff *Superzeichen* stammt aus der Kybernetik, einer wissenschaftlichen Forschungsrichtung, die auf Norbert Wiener zurückgeht und sich mit der Erforschung und Steuerung von Systemen beschäftigt (vgl. von Foerster, 1993, S. 61; Wiener, 1985). Frank (1964) erklärt, dass ein Zeichen als Element eines anderen Zeichens betrachtet werden könne. Das Element wird demnach als *Unterzeichen* bezeichnet und das übergeordnete Zeichen als *Superzeichen*. Dies erläutert er am Beispiel des Tons *c'*. Dieser klinge, je nach Wahl des Instrumentes, auf dem er gespielt werde, anders. „Der Ton c' ist also ein Superzeichen; einige seiner Unterzeichen sind das Orgel-c', das Klavier-c', das Flöten-c'. Die Klasse aller dieser Ausführungen von c' ist das Superzeichen c'; die einzelnen Ausführen sind die Elemente, aus denen dieses Superzeichen durch Klassenbildung konstruiert wird" (Frank, 1964, S. 15 f.). Angewandt auf die Würfelpunktbilder bilden die Strukturierung der einzelnen Würfelaugen und damit die gesamte Erscheinungsform jeden einzelnen Bildes ein Superzeichen. Eine Besonderheit ist in diesem Fall, dass die Unterzeichen ein grafischer Teil des Superzeichens sind. Personen, denen die Regeln der Strukturierung des Superzeichens nicht geläufig sind, können sie dennoch durch Nachzählen nachvollziehen, wofür aber mehr Zeit benötigt wird.

2.7.5 Simultandysgnosie

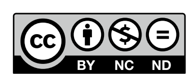
Die Ergebnisse des Experiments *Strichreihen* bestätigen die häufig verifizierte Annahme, dass neurotypische Personen einen Aufmerksamkeitsumfang von vier Chunks aufweisen (vgl. Unterkapitel 2.6.2). Sie belegen außerdem, dass die Vergleichsgruppe, bestehend aus Menschen mit Trisomie 21, weniger als vier Chunks gleichzeitig verarbeitet. Ihr Aufmerksamkeitsumfang lässt sich mit zwei bis drei Chunks beziffern (Zimpel & Rieckmann, 2020).

In Anlehnung an den Begriff *Simultanagnosie*, der die Einengung des Aufmerksamkeitsumfangs auf einen Chunk bezeichnet, wählt Zimpel den Begriff *Simultandysgnosie*. Dieser bezeichnet die Einengung des Aufmerksamkeitsumfangs auf weniger als vier Chunks zur selben Zeit (Zimpel, 2013b, S. 38). Die Ergebnisse zu Zimpels weiteren Experimenten zum visuellen, auditiven und taktilen Aufmerksamkeitsumfang und aus Röhms Experimenten zum kybernetischen Aufmerksamkeitsumfang legen nahe, dass es sich hierbei um einen globalen

Effekt handelt, der nicht nur die Verarbeitung von visuellen Inhalten, sondern vielmehr die Verarbeitung aller Reize betrifft (Röhm, 2017; Zimpel, 2016).

2.8 Neurodiversität

Aufgrund der Simultandysgnosie ist davon auszugehen, dass Menschen mit Trisomie 21 ihre Umwelt auf eine radikal andere Weise verarbeiten als Menschen ohne dieses Syndrom. Unser Ziffernsystem und die Schriftsprache sind für einen Aufmerksamkeitsumfang von vier Chunks angepasst (Zimpel, 2012a, S. 35, 179 f.). Womöglich sind die gesamten von Menschen gestalteten Teile unserer Umwelt, unsere etablierten Kommunikationsstrukturen und Lebensweisen ebenfalls für den neurotypischen Aufmerksamkeitsumfang optimiert. Dies könnte erklären, warum das Agieren von Personen mit Trisomie 21 mit unserer Umwelt aus Sicht neurotypischer Beobachter*innen als „geistig behindert" interpretiert wird. Die Behinderung, die Menschen mit Trisomie 21 erleben, muss aber nicht zwangsläufig als Problem kognitiven Ursprungs betrachtet werden. Sie liegt in der Auseinandersetzung von Personen mit Trisomie 21 mit einer Umgebung vor, die nicht für ihren Aufmerksamkeitsumfang optimiert ist. Ein Defizit ist bei dieser Betrachtungsweise ausdrücklich nicht in den Lern- und Denkprozessen von Personen mit Simultandysgnosie zu finden, sondern in der mangelnden Barrierefreiheit der Umwelt, in der sie leben. Die Verortung der Behinderung im Individuum birgt die Gefahr, eine Pathologisierung hervorzubringen und notwendigen Veränderungen in bestimmten Lebenslagen und der Schaffung von Barrierefreiheit entgegenzuwirken (vgl. Kleiner, Rieckmann & Zimpel, 2016, S. 62 f.). Für eine Entpathologisierung von Diversität und damit für die Dekonstruktion von Normalität und Verschiedenheit setzt sich die politische Neurodiversitätsbewegung ein. Ihre Initiatorin Singer stilisiert *neuronale Vielfalt* zum politischen Kampfbegriff neben Klasse, Gender und Rasse (Singer, 1998, S. 11). Wie zuvor bei sexueller und geschlechtlicher Diversität ist die Neurodiversität längst kein politischer Kampfbegriff mehr, sondern Gegenstand der Forschung und wissenschaftlich anerkannt. Zimpel (2016, S. 100) definiert Neurodiversität folgendermaßen: „Neurodiversität beinhaltet die Anerkennung der menschlichen Vielfalt funktionierender Nervensysteme als gleichberechtigte Lebensformen, die neurotypische Variante natürlich eingeschlossen".


cc
BY NC ND

3 Mathematische Lernschwierigkeiten

Die Studienlage und die Untersuchungen zur Zahlbegriffsentwicklung zeigen, dass Personen mit Trisomie 21 gehäuft mathematische Lernschwierigkeiten aufweisen. Unbeantwortet bleibt die Frage, worin diese Lernschwierigkeiten begründet liegen. Angesichts des Verständnisses von Neurodiversität wäre die Begründung, eine Trisomie 21 würde regelmäßig mit einer Beeinträchtigung aller kognitiven Prozesse einhergehen, zu kurz gefasst.

Im folgenden Kapitel soll die Frage behandelt werden, warum eine Simultandysgnosie zu mathematischen Lernschwierigkeiten führen kann. Zu diesem Zweck werden Modelle, die das numerische Denken im menschlichen Gehirn verorten, vorgestellt und Forschungsergebnisse zu den Ursprüngen von Dyskalkulien rezipiert.

Im Anschluss wird ein im deutschsprachigen Raum weitverbreitetes Darstellungsmittel von Mengen, die *Kraft der Fünf,* vorgestellt. Die didaktische Wirkungsweise der Kraft der Fünf wird unter Berücksichtigung der Forschungslage zur Dyskalkulie diskutiert.

3.1 Simultanerfassung als neuronaler Prozess

Neben den kognitiven Voraussetzungen für den Umgang mit Zahlen und der Zahlbegriffsentwicklung, die initial und bis heute bedeutend von Piaget beforscht wurde (vgl. Unterkapitel 2.2.2.1), stehen die neuronalen Prozesse in der Verarbeitung von Zahlen, Mengen und mathematischen Berechnungen ebenfalls im Fokus wissenschaftlicher Auseinandersetzungen. Mit dem Anspruch, kognitive

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_3

Prozesse des Zählens, Rechnens und weiteren Formen des mathematischen Handelns im Gehirn zu verorten, entstanden zahlreiche Modelle, die insbesondere im Fall des Modells von Deheane (1992) kontrovers diskutiert, korrigiert und erweitert wurden. Die Fähigkeit der Simultanerfassung spielt in den Theorien zur Zahlenverarbeitung häufig eine prominente Rolle und wird direkt mit der Fähigkeit zum Umgang mit Zahlen in einen Zusammenhang gebracht. Gallistel und Gelman (1992) zeigen, dass die Simultanerfassung als Form der Mengenbestimmung selbst Tieren möglich ist. Sie stellen auf Grundlage von Studienergebnissen zu diesen präverbalen Zählmechanismen von Tieren einen Zusammenhang zwischen präverbalen numerischen Kompetenzen und der Zahlbegriffsentwicklung her. Ihre *Bidirectional Mapping Hypothesis* besagt, dass beim Zählenlernen eine Verknüpfung der präverbalen Mengenvorstellung eines Menschen und den Zahlwörtern stattfindet (ebd., S. 55). Ihrer Einschätzung nach wird diese Verknüpfung bei der Simultanerfassung deutlich, in der nach der Erfassung einer Menge, ohne diese aktiv zählen zu müssen, das entsprechende Zahlwort sofort genannt werden kann (ebd., S. 58).

Stanislas Dehaene (1992) stellte zeitgleich zur Publikation der Überlegungen von Gallistel und Gelman das Triple-Code-Modell vor. Laut diesem Modell verteilt sich die Verarbeitung mathematischer Inhalte in drei separate Komponente, sog. *Codes*:

1. Visuell-arabischer Zahlencode: Beinhaltet das Lesen und Schreiben arabischer Zahlen. Dieses System ermöglicht u. a. Operationen mit mehrstelligen Zahlen und die Unterscheidung von geraden und ungeraden Zahlen.
2. Verbal-phonologischer Zahlencode: Universelle Module der Sprachverarbeitung, die schriftliche und auditive Eindrücke verarbeiten sowie schriftliche und gesprochene Ausgaben ermöglichen. Sie befähigen u. a. zur Beantwortung auswendig gelernter Additions- und Multiplikationsaufgaben.
3. Analoge Größenrepräsentation: Präverbales System des arithmetischen Denkens, das die Simultanerfassung, das Schätzen und mentale Zahlenvorstellungen beinhaltet. Es ermöglicht u. a. Vergleiche und ungefähres Rechnen.
(Dehaene, 1992, S. 31; Landerl, 2020)

Diese Codes stehen im Austausch miteinander: So kann beispielsweise eine Übersetzung von verbal-phonologischen zu visuell-arabischen Zahlen stattfinden oder auf Grundlage einer arabischen Zahl auf eine Mengenvorstellung geschlossen werden (Dehaene, 1992, S. 32). Dehaene betont allerdings, dass das Ideal eines einheitlichen Zahlbegriffs, das von Piaget (1975) und Frege (1987) postuliert wurde, zugunsten dieses modularen Konzepts verworfen werden müsse (Dehaene,

1992, S. 34). Das Modul der analogen Größenrepräsentation, das die Simultanerfassung ermöglicht, bezeichnet Dehaene in Anlehnung an Dantzig als *Number Sense* bzw. *Zahlensinn* (Dantzig, 2005; Dehaene, 2011).

Gemeinsam mit Cohen nimmt Dehaene (1995) eine Verortung des Triple-Code-Modells im menschlichen Gehirn vor. Demnach wird die analoge Größenrepräsentation in beiden Hemisphären im parietalen Kortex verortet; der verbal-phonologische Zahlencode in der sylvischen Furche der linken Großhirnrinde und der visuell-arabische Zahlencode bilateral im Gyrus fusiformis (Dehaene & Cohen, 1995, S. 88 f.; Landerl, 2020).

Das funktionalanatomische Triple-Code-Modell zur Zahlverarbeitung gilt bis heute als Standard und ist Gegenstand aktueller Forschung, die zu dessen Präzisierung und Weiterentwicklung führte (Dehaene, 2011, S. 237; Nuerk, Klein & Willmes, 2013, S. 444). Beispielsweise wurde das Modell um die Vorstellung eines Zahlenstrahls erweitert, der in beiden Hemisphären im superior parietalen Bereich lokalisiert ist (Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003, S. 501; Nuerk et al., 2013, S. 444).

Auch Butterworths Modell des mathematical brains (1999, S. 8) ist modular aufgebaut: Das *Number Module*, das den Zahlensinn bzw. die Fähigkeit der Simultanerfassung beinhaltet, bildet in diesem Modell das Zentrum allen mathematischen Denkens: Als Kern der numerischen Fähigkeiten verarbeitet es die Anzahlen bis 4 oder 5. Um über die Anzahl 5 hinaus zu gehen, muss indes auf konzeptionelle Werkzeuge zurückgegriffen werden, die kulturell entwickelt wurden und zur Verfügung gestellt werden. Butterworth bezieht sich dabei auf die Forschungsergebnisse von Wynn (1992), die den Zahlensinn bereits bei fünf Monate alten Säuglingen nachweisen konnte.

Bei Prüfungen zur Reproduktion und Spezifizierung solcher neurokognitiven Modelle zur Zahlverarbeitung wurde unter Zuhilfenahme bildgebender Verfahren (u. a. Positronen-Emissions-Tomographie und Funktionelle Magnetresonanztomographie) vermehrt versucht, eine Lokalisation des Zahlensinns bzw. der Simultanerfassung vorzunehmen. Piazza, Mechelly, Butterworth et al. (2002, S. 444) kamen zu dem Ergebnis, dass für die Simultanerfassung und das Zählen keine trennbaren neuronalen Systeme identifiziert werden können. Allerdings identifizierten sie ein Aktivitätenmuster, das beim Zählen von Mengen im Bereich 6 bis 9 deutlich aktiver ist als bei der Erfassung von bis zu vier Einheiten.

Kaufmann, Wood, Rubinsten et al. (2011) versuchten in einer Metastudie, eine einheitliche Lokalisation abstrakter Zahlenvorstellungen bei Kindern vorzunehmen. Sie stellten grundsätzliche Unterschiede zwischen entwickelten und sich entwickelnden Gehirnen fest und konnten keine eindeutige Verortung der analogen Größenrepräsentation identifizieren (ebd., S. 783 f.).

Eine Einigung auf eine eindeutige Lokalisierung der Simultanerfassung zwischen den Wissenschaftler*innen, die dieses Gebiet beforschen, steht bisher aus. Dennoch wird die Bedeutung der Simultanerfassung als wesentlicher Teil der präverbalen numerischen Fähigkeiten des Menschen deutlich.

3.2 Simultanerfassung als Ursache einer Dyskalkulie

Die o. g. Forschungsarbeiten zeugen von der Bedeutung abstrakter Zahlenrepräsentationen für das mathematische Denken. Es stellt sich die Frage, ob eine veränderte Simultanerfassung, beispielsweise im Zusammenhang mit einer Simultandysgnosie, zu einer Dyskalkulie führen kann.

Der Begriff *Dyskalkulie* bezeichnet eine Rechenschwäche, die in Form einer isolierten Teilleistungsstörung auftreten, aber auch ein Begleitsymptom neuronaler Besonderheiten darstellen kann. Da unterschiedliche Ursachen zu einer Dyskalkulie führen können, handelt es sich nicht um ein homogenes Syndrom (Kaufmann, Handl, Margarete & Pixner, 2013, S. 231).

Laut Butterworth (2005, S. 455) liegt die Prävalenz (Verbreitung in der Bevölkerung) einer Dyskalkulie schätzungsweise zwischen 3,6 und 6,5 %. Er erklärt, dass die Gründe des Auftretens und die spezifischen Merkmale einer Dyskalkulie in der Wissenschaft kontrovers diskutiert würden. Einigkeit würde indes dahingehend bestehen, dass Kinder mit Dyskalkulie Schwierigkeiten hätten, arithmetische Fakten zu lernen und zu erinnern (ebd., S. 458). Ergebnisse neuerer Forschungen würden außerdem nahelegen, dass das Number Module seines Modells, also der Zahlensinn, ebenfalls eine erhebliche Rolle für das Auftreten von Rechenschwierigkeiten spiele (ebd., S. 460).

Kaufmann et al. (2013, S. 232) bestätigen diese Beobachtung und postulieren, dass im Wesentlichen zwei Formen der Dyskalkulie unterschieden werden sollten:

1. Schwierigkeiten hinsichtlich der Zahlenverarbeitung im engeren Sinne
2. Schwierigkeiten in der Durchführung von Rechenoperationen

Dabei handelt es sich gleichwohl nicht um einen wissenschaftlichen Konsens. Landerl, Bevan und Butterworth (2004, S. 102 f.) stellen die Studienlage zu den Ursprüngen einer Dyskalkulie dar und zeigen, dass diese teils widersprüchliche Befunde liefert. Sie erkennen allerdings die Tendenz, dass allgemeine Schwierigkeiten bei der grundlegenden Zahlenverarbeitung ein Merkmal von Dyskalkulie sein können. In ihren Untersuchungen gingen sie der Frage nach,

ob die Ursache einer Dyskalkulie mit einer Funktionsstörung des Number Modules zusammenhängt (ebd., S. 106). Da auch bei einer Dyslexie (Leseschwäche) Verarbeitungsbesonderheiten vorliegen können, unterschieden sie Teilnehmende, bei denen eine Dyskalkulie vorlag, von solchen, bei denen eine Dyslexie oder eine Kombination beider Entwicklungsstörungen vorlag. Untersucht wurden zehn Schüler*innen mit Dyslexie, zehn Schüler*innen mit Dyskalkulie und elf Schüler*innen, bei denen beide Entwicklungsstörungen diagnostiziert worden waren. Das Durchschnittsalter der Gruppen lag zwischen 8;8 und 9;2 Jahren, im Intelligenztest Coloured Progressive Matrices (CPM) erhielten sie jeweils zwischen 27 und 29,7 Rohwert-Punkte (ebd., S. 110). Im Rahmen dieser Untersuchung wurden mehrere Experimente durchgeführt, die das Benennen, Schreiben und Vergleichen von Zahlen sowie das Zählen abfragten. In einem Experiment wurden den Untersuchungspersonen zufällige Punktmuster gezeigt. Die Teilnehmenden wurden darum gebeten, schnellstmöglich die dargestellte Anzahl zu benennen. Ihre Reaktionszeit wurde durch Sprachsteuerung, etwaige Fehler wurden durch die/den Versuchsleiter*in aufgezeichnet (ebd., S. 113). In den Zahlenräumen 1 bis 3 und 4 bis 10 benötigten die Versuchspersonen mit Dyskalkulie oder einer Kombination aus Dyskalkulie und Dyslexie mehr Zeit zur Benennung der Mengen als die Kontrollgruppe oder die Versuchsgruppe mit Dyslexie. Eine (marginale) Signifikanz lag allerdings nur für den Zahlenbereich 4 bis 10 vor (ebd., S. 120).

Fischer, Gebhardt und Hartnegg (2008) führten eine Studie mit 375 Untersuchungspersonen im Alter von sieben bis 17 Jahren durch, die mindestens einen IQ von 80 aufwiesen. 156 dieser Untersuchungspersonen zeigten eine Rechenschwäche und bildeten die Versuchsgruppe. Den Untersuchungspersonen wurde auf einem kleinen LC-Display in einem Raster von 4×4 Einheiten für 100 ms ein Punktmuster gezeigt. Die Untersuchungspersonen waren angehalten, schnellstmöglich die Anzahl der Punkte (1 bis 8) über ein Tastenfeld einzugeben (Fischer et al., 2008, S. 25 f.). Im Vergleich zur Kontrollgruppe unterliefen den Untersuchungspersonen der Versuchsgruppe häufiger Fehler bei gleichzeitig längerer Antwortzeit (ebd., S. 26 f.). Fischer et al. gehen davon aus, dass Kinder mit diagnostizierter Dyskalkulie in 40 bis 79 % der Fälle Schwierigkeiten bei der Simultanerfassung und dem Zählen aufweisen (ebd., S. 28).

Auch Moeller, Neuburger, Kaufmann et al. (2009) beschäftigten sich mit der Frage, ob eine Dyskalkulie mit einem Defizit in der Fähigkeit der Simultanerfassung zurückzuführen ist. Hierzu führten sie ein Quasi-Experiment mit zwei Untersuchungspersonen im Alter von 10;7 und 10;10 Jahren mit Dyskalkulie und einer Kontrollgruppe, bestehend aus acht Kindern ohne Dyskalkulie im gleichen Alter, durch. Mit jeder Untersuchungsperson wurde einzeln ein Versuch

durchgeführt, bei dem die Blickpunkte, sog. Fixationen, durch ein Eye-Tracking-Verfahren aufgezeichnet wurden. Der Untersuchungsperson wurde auf einem Bildschirm jeweils ein Punktmuster präsentiert. Ihre Aufgabe bestand nun darin, so schnell wie möglich die Anzahl der Punkte zu benennen und mit dem Drücken einer Taste das Bild wieder auszublenden (ebd., S. 375 f.).

Die erste Untersuchungsperson der Versuchsgruppe zeigte bei den Anzahlen 1 bis 3 deutlich mehr Fixationen als die Kontrollgruppe. Mit steigender Anzahl der Punkte erhöhte sich allerdings nicht die Anzahl der Fixationen, sondern vielmehr die Blickdauer. Die zweite Untersuchungsperson der Versuchsgruppe zeigte bei den Anzahlen 1 bis 3 ebenfalls deutlich mehr Fixationen als die Kontrollgruppe. In ihrem Fall steigerte sich die Anzahl der Fixationen bei steigender Anzahl der Punkte im Punktmuster (ebd., S. 378 ff.). Die Forschenden schließen daraus, dass die beiden Untersuchungspersonen in der Simultanerfassung beeinträchtigt sind und deshalb bereits bei kleinen Anzahlen das Zählen als Back-Up-Strategie einsetzen (ebd., S. 380).

Schleifer und Landerl (2011) führten eine Studie mit 52 Schüler*innen durch, die unter den Bedingungen einer Dyskalkulie leben und die Klassenstufen 2 bis 4 besuchten. Die Kontrollgruppe bildeten 52 Schüler*innen im gleichen Alter ohne diagnostizierte Entwicklungsstörung, die mithilfe standardisierter Intelligenztestverfahren gematcht wurden (Schleifer & Landerl, 2011, S. 285). Den Untersuchungspersonen wurden im Einzelexperiment Punktmuster in Zufallsanordnung gezeigt. Ihre Aufgabe bestand darin, schnellstmöglich eine Taste zu drücken und die Anzahl der Punkte (1 bis 8) zu benennen. Nach Tastendruck verschwanden die Punkte und ein Störbild wurde eingeblendet (ebd., S. 286). In allen Klassenstufen gelang der Kontrollgruppe die Benennung der Anzahl schneller als der jeweiligen Versuchsgruppe. Im Zahlenbereich 1 bis 3 sind diese Unterschiede signifikant, was ein Hinweis darauf sein könnte, dass die Untersuchungspersonen mit Dyskalkulie lediglich die Mengen 1 und 2 simultan erfassen können (ebd., S. 287 f.).

Die Gesamtheit der o. g. Studien lässt erkennen, dass sich unter den Personen mit einer Dyskalkulie auch solche befinden, die eine verminderte Fähigkeit der Simultanerfassung aufweisen. Eine Simultandysgnosie ist demnach kein Effekt, der lediglich bei Personen mit Trisomie 21 auftritt. Es muss davon ausgegangen werden, dass sich insbesondere unter Schüler*innen mit Dyskalkulie ein Anteil mit Simultandysgnosie befindet. Welche Konsequenzen sich daraus für den Erwerb numerischer Fähigkeiten und für die Pädagogik ergeben, wird im folgenden Abschnitt behandelt.

3.3 Die Kraft der Fünf

Der mathematische Anfangsunterricht im deutschsprachigen Raum ist von einer Mengendarstellung geprägt, die auf einer Bündelung von fünf Einheiten basiert. Sie wird als *Kraft der Fünf* bezeichnet und findet sich in der überwiegenden Zahl der Lehrwerke wieder. Die Kraft der Fünf liegt darin, dass eine Fünferbündelung von Mengen für die meisten Menschen die Übersichtlichkeit erhöht und dass das Kopfrechnen mit abstrakten Mengen ermöglicht wird.

Das folgende Unterkapitel behandelt die Geschichte und die Vorteile von Fünferbündelungen. Die Verbreitung der Kraft der Fünf im mathematischen Anfangsunterricht wird anhand ausgewählter Beispiele illustriert und die Theorie, die ihr zugrunde liegt, wird wiedergegeben. Zuletzt wird die Eignung der Kraft der Fünf für Personen mit Simultandysgnosie in Frage gestellt wird und die Problemstellung dieser Arbeit formuliert.

3.3.1 Fünferbündelungen in der Geschichte der Zahl

Die Fünferbündelung ist von Strichlisten aus dem Alltag bekannt: Während die ersten vier Striche noch parallel aneinandergereiht werden, wird der fünfte Strich diagonal über die vier Senkrechten geschrieben. Auch in einem beträchtlichen Teil der antiken Kulturen wurden die Zahlen ab 5 anders dargestellt als die Zahlen zuvor. Ifrah (2010, S. 170 f.) stellte in einem umfassenden Nachschlagewerk zur Geschichte der Zahl antike Zahlensysteme zusammen und zeigt in diesem Zusammenhang, dass im Falle der antiken Zahlensysteme der Ägypter, Kreter, Hethiter und Inder einzelne Ziffern, die Einsen darstellen, aneinandergereiht und ab der Zahl 5 gebündelt werden (Abbildung 3.1)

1	2	3	4	5	6	7	8
I	II	III	IIII	III II	III III	IIII III	IIII IIII

Abbildung 3.1 Antike Zahldarstellungen der Ägypter, Kreter, Hethiter und Inder (vgl. Ifrah, 2010, S. 172)

Neben bloßer Bündelung kann auch mithilfe von Superzeichen (vgl. Unterkapitel 2.7.4) die Kraft der Fünf genutzt werden. Die Zahlensysteme aus dem

antiken Griechenland, Südarabien, Kleinasien oder der Maya haben gemein, dass auf eine Aneinanderreihung von fünf Einsen verzichtet und stattdessen ein Superzeichen verwendet wird (Ifrah, 2010, S. 171 f.). Im Punkt-Balken-System der Maya, das ab dem fünften Jahrhundert v. Chr. in Mittelamerika für die Darstellung der Zahlen 1 bis 19 verwendet wurde, wird die 1 beispielsweise durch einen Punkt dargestellt. Die Darstellung der Zahlen 2 bis 4 erfolgt durch eine Aneinanderreihung dieses Zeichens. Die 5 wird entgegen dieser Systematik allerdings nicht durch fünf Punkte, sondern durch einen Balken dargestellt (Cauty, 2006, S. 17) (Abbildung 3.2).

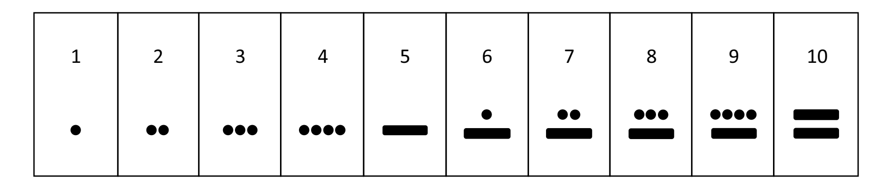


Abbildung 3.2 Die Zahlen 1 bis 10 des Punkt-Balken-Systems der Maya (Cauty, 2006, S. 17)

Dass ausgerechnet bei der Zahl 5 eine Bündelung erfolgt oder anstelle fünf gleicher Ziffern ein Superzeichen verwendet wird, liegt mutmaßlich in der Tatsache begründet, dass die meisten Menschen fünf Finger an einer Hand haben. Darüber hinaus wirkt sich diese Darstellungsform aber auch entlastend auf die Aufmerksamkeit aus: Anzahlen wie **III** oder **IIII** lassen sich für viele Menschen auf dem ersten Blick simultan erfassen. Anzahlen wie **IIIIII** oder **IIIII** können die meisten Menschen hingegen nur durch Nachzählen voneinander unterscheiden, da die Aneinanderreihung von fünf oder sechs Zeichen zu einer größeren Gestalt verschwimmt (Zimpel, 2012a, S. 33 ff.). In Darstellungen wie **III-III** oder **6** können die Anzahlen ad hoc identifiziert werden, weil Bündelungen und Superzeichen unterstützend wirken. Sie beugen einer Überforderung der Aufmerksamkeit vor und ermöglichen die Simultanerfassung.

3.3.2 Die Kraft der Fünf im mathematischen Anfangsunterricht

Im Folgenden wird der fachdidaktische Einsatz von Fünferbündelungen im mathematischen Anfangsunterricht behandelt. Nach einer Beschreibung des Aufkommens der Kraft der Fünf in Lernmaterialien werden verschiedene Funktionen dieser Bündelungsform beleuchtet. Die Kraft der Fünf wird in der Veranschaulichung von Mengen verwendet, zur Verdeutlichung von Zahlzerlegungen und zur Anregung der Entwicklung mentaler Mengenbilder. Zuletzt wird das Konzept des *Blitzrechnens* illustriert. Das Konzept der Kraft der Fünf und die Möglichkeiten der Arbeit mit Lernmaterialen, die darauf basieren, können gewiss nicht erschöpfend behandelt werden. Stattdessen werden die für die Problemstellung dieser Arbeit relevanten Aspekte des Themas ausgearbeitet.

3.3.2.1 Lernmaterialien mit Fünferbündelung

Im mathematischen Anfangsunterricht an deutschsprachigen Schulen ist die Fünferbündelung allgegenwärtig. Selbst an Schulen, die nicht mit Lehrwerken arbeiten, die auf Mengendarstellungen durch Fünferbündelung aufbauen, finden sich erfahrungsgemäß Abaki, also Rechenrahmen, die zur erleichterten Handhabung pro Reihe jeweils fünf blaue und fünf rote Perlen aufweisen. In Abbildung 3.3 wird die Zahl 428 mit Hilfe eines Abakus dargestellt.

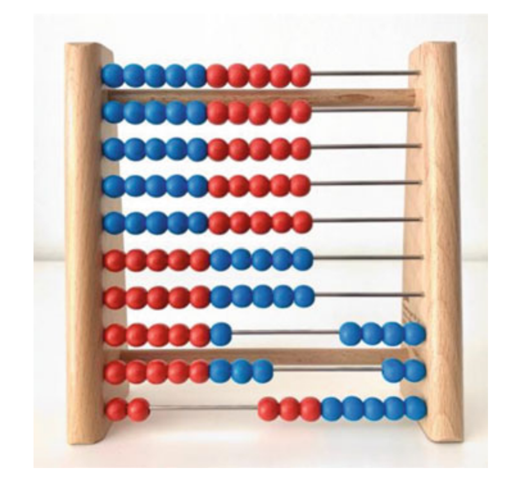


Abbildung 3.3 Rechenrahmen, der die Zahl 428 zeigt. Hersteller: Gollnest & Kiesel

Der Abakus ermöglicht Rechenoperationen, die über die eigenen Kopfrechenmöglichkeiten hinausgehen. Dazu können den verschiedenen Reihen von unten nach oben Stellenwerte zugeordnet werden. Die untere Reihe kann z. B. für die Einer, die nächste für den Zehner und die dritte Reihe von unten für den Hunderter stehen. Um Zahlen darzustellen, wird die entsprechende Anzahl an Perlen nach rechts verschoben. In diesem Beispiel stehen vier Perlen im Hunderter, zwei im Zehner und acht im Einer. Die vier Perlen im Hunderter können simultan erfasst werden. Ebenso verhält es sich mit den zwei Perlen im Zehner. Die Perlen des Einers können quasi-simultan und damit ebenfalls auf einen Blick erfasst werden: Eine vollständige Reihe blauer Perlen stellt den Wert 5 dar, die drei weiteren roten Perlen werden simultan verarbeitet und können dazu addiert werden.

Auch in den Lehrwerken, Arbeitsheften und Lern-Apps des mathematischen Anfangsunterrichts wird die Fünferbündelung häufig eingesetzt. Im Rahmen seiner Bachelorarbeit an der Universität Hamburg beschäftigte sich der Student Matthias Heine (2015) mit den Lernmitteln im Mathematikunterricht des ersten Schuljahres an Regel- und Förderschulen in Deutschland. Dabei konzentrierte er sich auf Bundesländer, die die Arbeit mit bestimmten Lehrwerken vorgeben. Er fand heraus, dass alle gesichteten Schulbücher und Rechenhefte zur Veranschaulichung von Mengen die Fünferbündelung und das sog. *Zwanzigerfeld* nutzen (Heine, 2015, S. 34). Die Fünferbündelung findet sich in konventionellen Lehrwerken zum mathematischen Anfangsunterricht, aber auch in solchen, die sich als inklusiv bezeichnen (eine Ausnahme bildet beispielsweise Raab, 2016). Abbildung 3.4 zeigt die Mengendarstellung der Zahl 8 im Arbeitsheft *Mathematik 1/2 – Zahlenraum bis 10* der Reihe *Klick! inklusiv* des Cornelsen-Verlags.

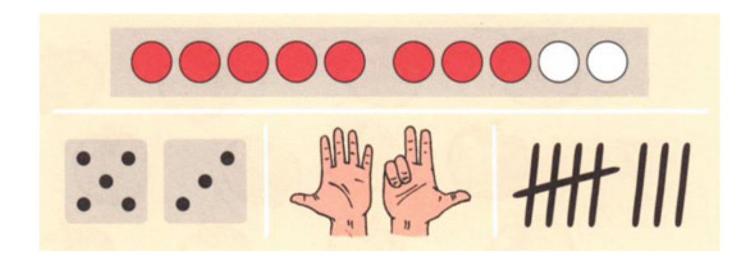


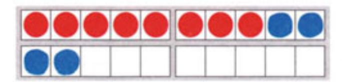
Abbildung 3.4 Mengendarstellungen zur Zahl 8 (Weisse, Burkhart & Franz, 2019, S. 40)

Die Zahl 8 wird mithilfe eines Zehnerfeldes dargestellt, das aus zehn Kreisen in einer Reihe, unterbrochen durch eine Lücke, besteht. Acht dieser Kreise sind

rot dargestellt, zwei weiß. Daneben wird die Zahl 8 durch zwei Würfel dargestellt, die die Würfelbilder 5 und 3 zeigen, durch zwei Hände, die jeweils fünf und drei Finger zeigen, und durch Striche, die im zuvor beschriebenen Format einer Strichliste angeordnet sind. Diese vier Darstellungsweisen der Zahlen finden in diesem Arbeitsheft für alle Zahlen Anwendung. Lediglich die Darstellung der Zahl 6 durch Würfelbilder variiert: Während sie bei der Einführung der Zahl als Würfelbild 6 dargestellt wird (Weisse et al., 2019, S. 20), wird sie in einer Übersicht auf der Innenseite des Rückdeckels mithilfe zweier Würfel dargestellt, die die Würfelbilder 5 und 1 zeigen.

In den Lehrwerken, die sich vornehmlich an Schüler*innen ohne sonderpädagogischen Förderbedarf zu richten scheinen, wird das Zehnerfeld in der Regel frühzeitig vom Zwanzigerfeld abgelöst. Abbildung 3.5 enthält eine Beispielaufgabe im Arbeitsheft zum Zahlenbuch 1 (Wittmann & Müller, 2012), in der die vorgegebenen roten Kreise gezählt werden sollen und die angegebene Anzahl als blaue Kreise hinzugemalt werden soll. Im Anschluss soll die Summe der Kreise eingetragen werden.

Male und rechne.



8 Plättchen. 4 dazulegen.

Es sind .... Plättchen.

Abbildung 3.5
Vorausgefüllte Beispielaufgabe zur Addition im Zwanzigerfeld (Wittmann & Müller, 2012, S. 26)

Die Kreise im Zwanzigerfeld werden als Plättchen bezeichnet, weil das Zwanzigerfeld nicht nur in Abbildungen, sondern auch in Form eines analogen Lernmaterials verwendet wird. Dabei werden Wendeplättchen, die auf einer Seite rot, auf der anderen blau sind, auf einen Ausdruck des (leeren) Zwanzigerfeldes gelegt (Wittmann & Müller, 2019, S. 49 f.). Im Beispiel in Abbildung 3.5 wird die Fünferbündelung durch einen größeren Zeilenabstand und einen größeren Abstand zwischen dem fünften und sechsten Wendeplättchen (bei Zählweise von links oben nach rechts unten) erzielt.

Das Zwanzigerfeld ist auch aus Holz oder als App verfügbar. In der App *Zwanzigerfeld für iPad* können Mengen von 0 bis 20 sowie Additions- und Subtraktionsaufgaben im Zahlenraum 20 dargestellt werden (Abbildung 3.6)

In diesem Beispiel wird die Fünferbündelung durch einen Rahmen um jeweils fünf virtuelle Wendeplättchen erzielt.

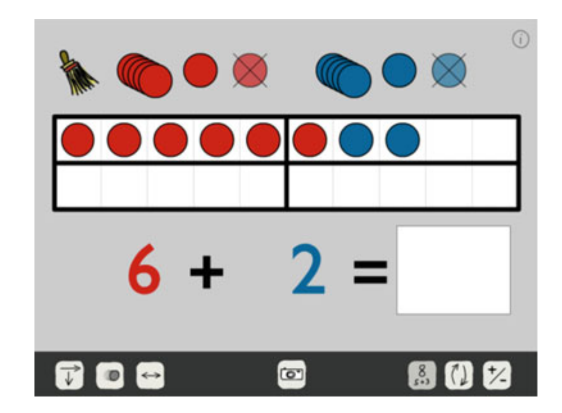


Abbildung 3.6
Screenshot der App Zwanzigerfeld für iPad (Urff, 2017)

Um Mengen in den Zahlenräumen 100 und 1000 darzustellen, können Hunderterfelder oder Tausenderbücher verwendet werden (Krauthausen, 2018, S. 327). Diese werden ebenfalls mit Fünferbündelungen angeboten. Abbildung 3.7 enthält ein Hunderterfeld, das in den Lehrwerken von Wittmann und Müller Verwendung findet und u. a. zum „produktiven Üben" des Einmaleins verwendet wird (Wittmann & Müller, 2008, S. 59).

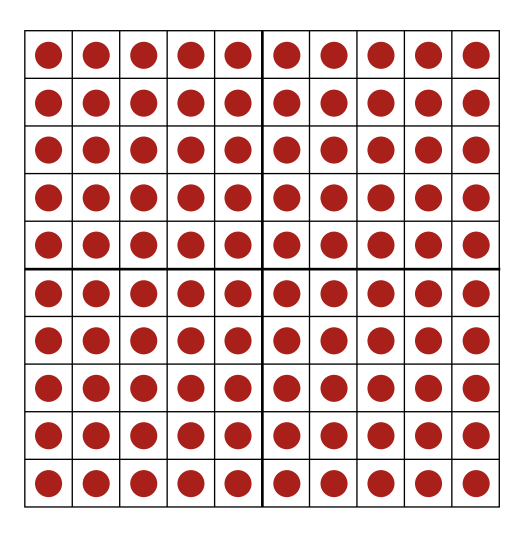


Abbildung 3.7
Hunderterfeld mit Fünferbündelung (Wittmann & Müller, 2019, S. 146)

Die Fünferbündelung erfolgt in diesem Beispiel subtiler: Es besteht kein größerer Abstand zwischen den Plättchen – weder auf Zeilen- noch auf Spaltenebene. Die Linie nach jeweils fünf Spalten und fünf Zeilen ist allerdings stärker hervorgehoben.

Tausenderbücher bestehen aus zehn Hunderterfeldern, die als Leporello aneinandergefügt sind. Auf der einen Seite des Leporellos befinden sich gedruckte Ziffern, auf der anderen Plättchen mit Fünferbündelung. Im folgenden Beispiel erfolgt die Fünferbündelung durch eine gestrichelte Linie und einen deutlichen Abstand nach jeweils fünf waagerechten und fünf senkrechten Punkten (Abbildung 3.8).

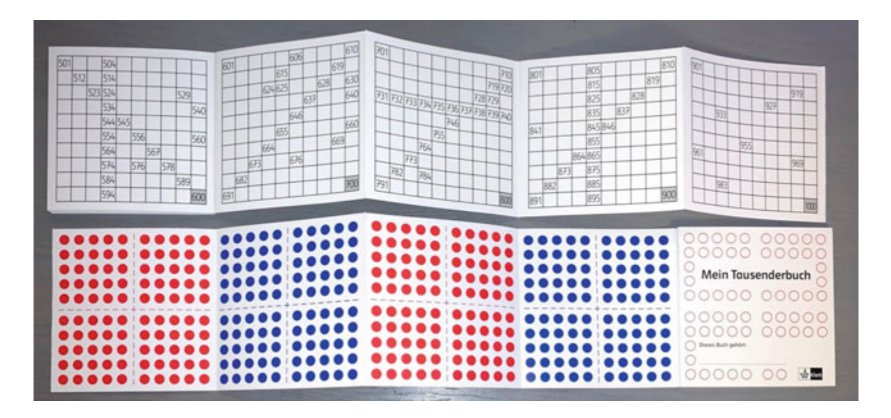


Abbildung 3.8 Zwei teilweise entfaltete Tausenderbücher (Wittmann & Müller, 1997)

3.3.2.2 Mengen veranschaulichen

Zur Verbreitung der Fünferbündelung im Volksschulunterricht der 1920er-Jahre im deutschsprachigen Raum hat der Reformpädagoge Johannes Kühnel beigetragen. In Vorträgen und Publikationen machte er seinen *Neubau des Rechenunterrichts* bekannt und vertrieb Lernmaterial, das Mengen bis zu 10.000 unter Zuhilfenahme der Fünferbündelung veranschaulichte (Kühnel, 1922). Kühnel begründet die Entwicklung seines Lehrwerkes vielfach mit eigenen Lehrerfahrungen und buchstäblicher anekdotischer Evidenz. So berichtete er über einen Dialog mit seinem Neffen, der die dritte Klasse besuchte:

> Der Knabe hat also keinen Schimmer vom System, obwohl er das Einmaleins hat lernen müssen. Nun versuche ich es anders:
>
> Ich kann die Augen zumachen, und kann dann 4 Kaffeetassen sehen (weil solche auf dem Tische standen), kannst du das auch? (lachend:) Nein! Versuche es doch! Er kneift die Augen zu, es dauert eine ganze Weile dann ruft er erfreut und erstaunt: Ja, ich bring's auch, an einer steht Marie, an der anderen Elisabeth . . . Oder kannst du jetzt mit zuen (geschlossenen) Augen 4 Pferde sehen? (Abwesende Dinge!) Er kneift wieder stark zu. Nach einer Weile: Jetzt sehe ich ein, nun noch eins, noch eins, noch eins! Sag' mal, sind deine Pferde angespannt? (Ich will möglichste Klarheit der Vorstellung erzwingen.) Nein! Spanne sie doch vor den Wagen! Erst sehe ich da zwei und davor noch zwei. Kannst du dir die Kaffeetassen auch so vorstellen? (Der Wechsel zu dem vorherigen Bild soll die *Anordnung* zum Bewußtsein bringen.) Verwundert fragt er: egale? Ja freilich, sage ich. Ach, ich denke, sie sollen verschieden sein. Also 4 egale Kaffeetassen! Ja, jetzt geht es. Zeige einmal, wo sie stehen! Hier eine, hier eine, hier eine, hier eine. In einer Reihe? Ja. Stelle sie doch einmal hübsch zusammen, daß sie auf ein kleines Tablett gehen! Es dauert immer eine Weile, bis das Bild vor die geschlossenen Augen tritt, dann sagt er: Hier zwei und da zwei. So, nun versuche es einmal mit 6 Kaffeetassen! Das gelingt. Auch mit 8 noch. Da beschreibt er: Erst 4 beieinander, dann noch 4. (Kühnel, 1922, S. 13)

Kühnel motivierte seinen Neffen dazu, gedanklich mit Viererbündeln zu arbeiten. Dieses Beispiel zeigt, dass Kühnel bereits von der Fähigkeit zur simultanen Verarbeitung von vier Chunks ausging. Der Pferdewagen mit vier angespannten Pferden und das Tablett, auf dem jeweils vier Tassen stehen, sind Superzeichen. Sie ermöglichen, sich auch sechs oder acht zählbare Elemente vorzustellen. Um Schüler*innen bei der Erschließung des Dezimalsystems zu unterstützen, schlägt Kühnel allerdings die Arbeit mit „Zahlbildern" vor. Diese bauen auf der Mengendarstellung nach Born auf, die dem Wesen des Zwanzigerfeldes bereits sehr nahe war (Kühnel, 1922, S. 29) (Abbildung 3.9).

Abbildung 3.9 Mengendarstellungen nach Born (Kühnel, 1922, S. 29)

Einerseits liegt nach Kühnel der Vorteil dieser Zahlbilder darin, dass im Gegensatz zu vielen anderen Mengendarstellungen, wie etwa Würfelpunktbildern, kleine Zahlen unmittelbar in größeren Zahlen wiedererkannt werden. Andererseits

lobt er ihre Erscheinung „als Produkt der Faktoren 2 und 5, der kleinsten möglichen und größten möglichen psychologischen Mehrheit, anatomisch überdies vorgebildet durch die 5 Finger an jeder Hand“ (ebd.).

Seine eigene Leistung bestehe nun darin, dass er dieses Prinzip auf den Zahlenraum 100 und 1000 übertragen hätte. Die Hundertertafel besteht dabei aus fünf Zwanzigerdarstellungen, das Zehntausenderblatt aus 100 Hundertertafeln (ebd., S. 31 f.) (Abbildung 3.10).

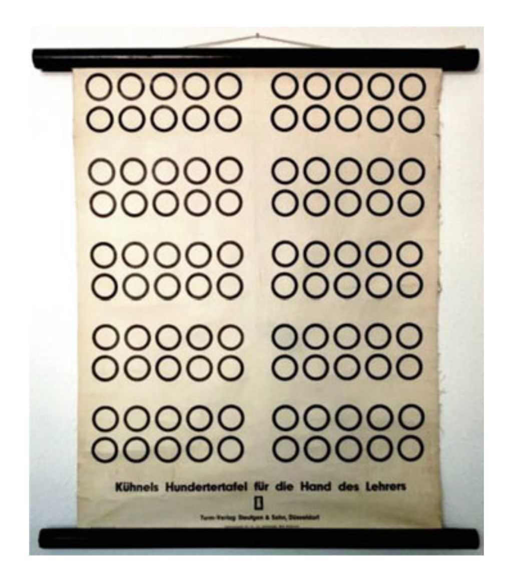


Abbildung 3.10 Rollplakat „Kühnels Hundertertafel für die Hand des Lehrers“ (keine Jahresangabe vorhanden)

3.3.2.3 Zahlen zerlegen

Mengendarstellungen mit Fünferbündelung werden im Mathematikunterricht üblicherweise nicht nur mit dem Ziel eingesetzt, Mengen zu veranschaulichen und quasi-simultan erfassbar zu machen, sondern auch, um Zahlzerlegungen zu veranschaulichen.

Thompson und Van de Walle (1984) stellen den sog. *10 Frame* von Wirtz (1978) vor und demonstrieren die *Power of 10*. Das Zehnerfeld ist ein Gitter, das sich in 2×5 Felder aufgliedert. Als alternative Darstellungsweise werden Eierkartons, die zehn Eier fassen können, vorgeschlagen. Um die Zahlen 1 bis 10 darzustellen, wird das Zehnerfeld in Leserichtung mit Zählsteinen (beispielsweise getrocknete Limabohnen) belegt. Auf diese Weise werden *10 Facts* ersichtlich:

Durch die unbelegten Felder wird deutlich, welche Zahl addiert werden muss, um 10 zu erreichen. Und bei Zahlen über 5 wird deutlich, wie sich diese im Sinne $x = 5 + y$ zerlegen lassen (Thompson & Van de Walle, 1984, S. 6) (Abbildung 3.11).

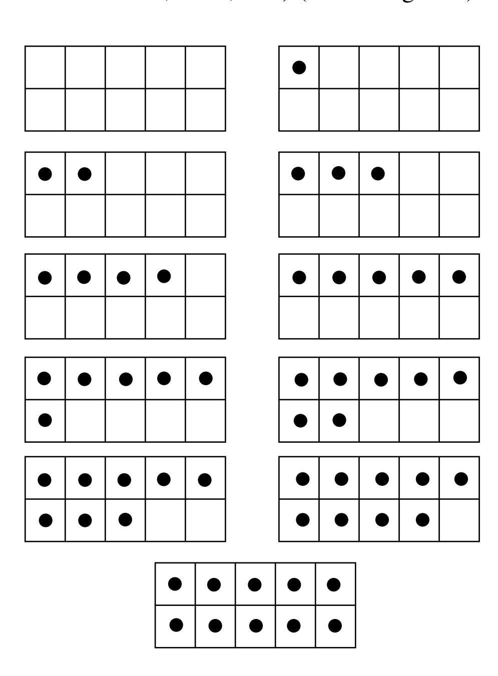


Abbildung 3.11 Karten mit den Mengenbildern 0 bis 10 (Thompson & Van de Walle, 1984, S. 7)

Thompson und Van de Walle (1984, S. 7 ff.) schlagen außerdem vor, mit Karten zu arbeiten, die die Mengen 0 bis 10 des Zehnerfeldes beinhalten. Den Kindern werden die Karten für einen kurzen Moment gezeigt. Ihre Aufgabe besteht nun darin, sie auf einen Blick zu erkennen und zu benennen. Die Autoren schlagen weitere spielerische Aktivitäten vor, die darauf abzielen, dass Schüler*innen die 10 Facts lernen und sich im Zehnerfeld orientieren. Außerdem sollten Kinder mit Hilfe von Zählsteinen und des Zehnerfeldrasters Additionsaufgaben vornehmen, die speziell den Zehnerübergang enthalten: Die Strategie *Making 10* soll angewandt werden, wenn ein Summand nah an der 10 ist und die Summe 10 übersteigen wird. Als Beispiel wird die Aufgabe 8 + 5 genannt, bei der zwei Zählsteine der Menge 5 genommen werden, um das Zehnerfeld vollständig zu belegen. Die weiteren drei Zählsteine werden zur 10 addiert, um das Ergebnis 13 zu erhalten (Thompson & Van de Walle, 1984, S. 8 f.).

3.3.2.4 Mentale Bilder zur Ausführung arithmetischer Operationen entwickeln

Flexer (1986) konstatierte in Bezug auf die didaktischen Vorschläge von Thompson und Van de Walle, dass es neben der Power of Ten eine Power of Five zu beobachten gebe, und prägte damit die Begrifflichkeit, die im deutschsprachigen Raum als *Kraft der Fünf* geführt wird. Die Kraft der Fünf liegt ihrer Ansicht nach darin begründet, dass Kindern der Übergang von konkreten Materialien zu mentalen Bildern von Rechnungen ermöglicht wird. Flexer schlägt vor, die Fünferstruktur nicht nur zur Veranschaulichung zu verwenden, sondern den Schüler*innen mit ihrer Hilfe auch eine Form des Kopfrechnens zu ermöglichen. Sie bezieht sich dabei auf das Konzept des *Mental Regroupings* (Ginbayashi, 1984; Hatano, 1980), das gezeigt habe, dass bereits junge Kinder Anzahlen von 1 bis 4 ohne Nachzählen erkennen könnten. Dieses System arbeitet mit Kacheln, die jeweils den Wert 1 haben und von unten nach oben gestapelt werden. Eine volle Reihe Fünferkacheln wird durch einen Fünferstab ersetzt, sodass auch Anzahlen von 5 bis 10 auf einen Blick erkannt werden können (Flexer, 1986, S. 6 f.) (Abbildung 3.12).

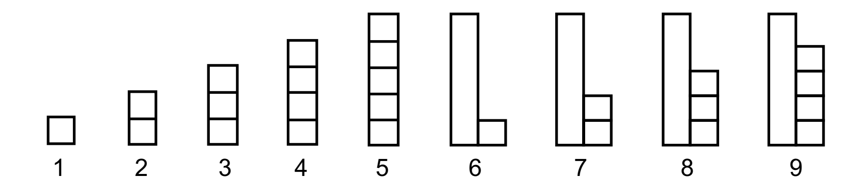


Abbildung 3.12 Mengenbilder des Mental Regroupings, die simultan erfasst werden können (Flexer, 1986, S. 6)

Um Operationen mithilfe der Kraft der Fünf zu ermöglichen, schlägt Flexer die Arbeit mit einem vertikal verlaufenden Fünferfeld vor, das aus einer Spalte aus fünf untereinanderstehenden Feldern besteht, die von unten nach oben belegt werden. Auf diese Weise sind Additionen möglich, die erst physisch mit den Fünferfeldern vorgenommen und später mental vollzogen werden. Bei der Addition zweier Zahlen unter 5 werden diese als Zählsteine in Fünferfeldern nebeneinander dargestellt und in Folge kombiniert (Flexer, 1986, S. 7) (Abbildung 3.13).

Im abgebildeten Beispiel der Aufgabe 4 + 3 wird ein Stein des Fünferfeldes, das die 3 enthält, entnommen und zum ersten Fünferfeld mit den vier Steinen hinzugefügt. Beide Fünferfelder werden dann kombiniert, um dem Zehnerfeld das Ergebnis 7 zu entnehmen. Auch Subtraktionsaufgaben sind hier möglich. Dazu

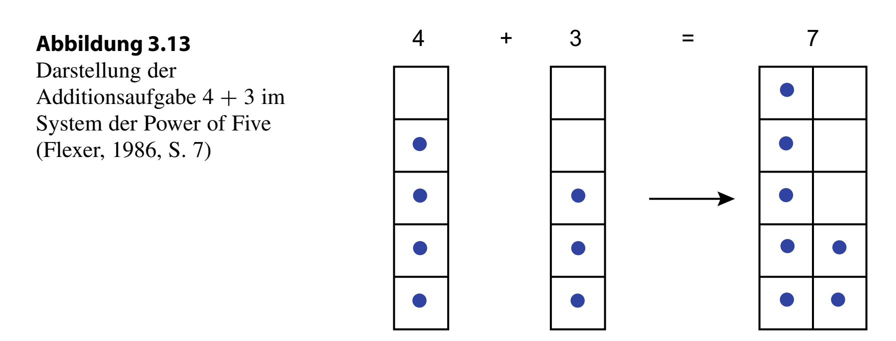


Abbildung 3.13 Darstellung der Additionsaufgabe 4 + 3 im System der Power of Five (Flexer, 1986, S. 7)

wird lediglich die Anzahl der kleineren Zahl aus dem Fünferfeld der größeren Zahl entnommen (ebd., S. 7 f.).

Wittman (1994, S. 45) präferiert die Arbeit mit dem Zwanzigerfeld (vgl. Abbildung 3.5), das er als ein „*Handlungsfeld*, auf dem die Kinder frei schalten und walten können“, beschreibt, das sich insbesondere zur Ablösung vom zählenden Rechnen eigne. So biete es mehrere Möglichkeiten, Anzahlen strukturiert darzustellen. Durch eigene Erfahrungen und die ihrer Mitschüler*innen würden Schüler*innen selbst feststellen, welche Legemöglichkeiten gedanklich besser nachvollziehbar seien (ebd.). Krauthausen (1995, S. 92) betont die Möglichkeit, mentale Bilder mit Fünferbündelung zu entwickeln:

> Die entscheidende Funktion konkreter Materialien besteht darin, den Kindern durch vielfältiges Tun die Möglichkeit zu geben, tragfähige *Vorstellungsbilder* zu konstruieren, d. h. eine Zahldarstellung oder die konkrete Repräsentation einer Rechenoperation nicht nur direkt vor sich auf dem Tisch zu sehen, sondern auch vor dem inneren, *geistigen Auge* – ohne konkret vorliegendes Material.

Unter Bezugnahme auf Wittmann (1994, S. 44) sieht er den Vorteil in der Arbeit mit Wendeplättchen darin, dass diese „amphibischen Charakter“ hätten: „Sie sind einerseits konkret, so daß sich leicht mit ihnen hantieren läßt, andererseits aber sind sie so abstrakt, daß sie als Repräsentanten für unterschiedlichste Konkretionen stehen können“ (Krauthausen, 1995, S. 92).

Krauthausen (ebd., S. 98) erklärt, wie die Kraft der Fünf die Simultanerfassung von Vierermengen nutzt, um größere Mengen zu erfassen. Sobald eine Anzahl gezählt werden müsse, weil sie mindestens 5 betrage, könne man auf eine „neue Einheit“ zurückgreifen, die als solche wiederum simultan erfassbar sei:

> Einer-Zahlen größer als *5* lassen sich somit in ihrem Bezug zur *5* darstellen ($n = 5 + x$): $6 = 5 + 1$, $7 = 5 + 2$, $8 = 5 + 3$, $9 = 5 + 4$; jeder der Summanden rechts der Gleichheitszeichen ist simultan erfaßbar und macht damit ein Zählen überflüssig; die Zahl kann unmittelbar „gelesen" werden (ebd.)

Abbildung 3.14 verdeutlich schematisch, wie diese Form der Quasi-Simultanerfassung erfolgt: Fünferreihen werden als ganze Reihe und nicht anhand ihrer einzelnen Elemente verarbeitet.

Abbildung 3.14 Schematische Darstellung der Kraft der Fünf (Krauthausen, 1995, S. 98)

3.3.2.5 Blitzrechnen

Erich Wittmann und Gerd Müller gründeten 1987 das Projekt *mathe 2000*, das sich inhaltlich von der zuvor verbreiteten Mengenlehre abgrenzte und sich in der Tradition Kühnels verstand (Wittmann, 2012, S. 268). Aus dem Projekt gingen u. a. ein zweibändiger Leitfaden für Lehrende mit dem Titel *Handbuch produktiver Rechenübung* und das Lehrwerk *Zahlenbuch* hervor (Wittmann & Müller, 2012, 2019). Neben dem „produktiven Üben", das inhaltliche und allgemeine Lernziele gleichermaßen berücksichtigen soll, wird dem „Blitzrechnen", einer Form des automatisierenden Übens, in diesem didaktischen Konzept viel Raum gegeben (Wittmann, 2012, S. 271). Konkret handelt es sich dabei um Übungen, die in Kleingruppen oder als Einzelaufgabe regelmäßig neben dem regulären Mathematikunterricht ausdauernd und gründlich durchgeführt werden sollten (Wittmann & Müller, 2019, S. 108 f.). Laut Wittmann und Müller (ebd.) stellen sie eine „Verständnisbasis dar, die man zu Recht als *Gerüst (oder Skelett)*

des Rechenunterrichts bezeichnen kann“ (ebd., S. 108). Sechs der *Blitzrechenübungen des Zwanzigerraums* werden mithilfe des Zehner- oder Zwanzigerfeldes bearbeitet:

1. Kraft der Fünf: Zahlendarstellungen im Zwanzigerfeld werden in ihrer Struktur untersucht und benannt. Bestimmt werden soll, aus wie vielen Fünfern und Einern sich eine Zahl zusammensetzt.
2. Ergänzen bis 10: Eine Zahl unter 10 wird im Zehnerfeld dargestellt. Die Aufgabe besteht darin, sie bis 10 zu ergänzen (Alternativ auch als *Ergänzen bis 20* im Zwanzigerfeld möglich).
3. Verdoppeln: Eine Zahl unter 10 wird im Zwanzigerfeld dargestellt. Sie soll verdoppelt werden. Das Ergebnis wird genannt.
4. Einspluseins: Eine Plusaufgabe wird mithilfe des Zwanzigerfeldes dargestellt. Sie soll benannt und gelöst werden.
5. Einsminuseins: Eine Minusaufgabe wird mithilfe des Zwanzigerfeldes dargestellt. Sie soll benannt und gelöst werden.
6. Halbieren: Im Zwanzigerfeld wird eine gerade Zahl dargestellt. Sie soll halbiert werden und das Ergebnis soll genannt werden.

(ebd., S. 110 ff.)

Die Blitzrechenübungen gliedern sich jeweils in zwei Phasen. In der Grundlegungsphase wird mit konkretem Material, wie etwa Wendeplättchen und dem Zwanzigerfeld, gearbeitet. Darauf folgt eine Automatisierungsphase, die darauf abzielt, dass Schüler*innen die zuvor konkret durchgeführten Operationen mental durchführen (ebd.).

Zur Durchführung der Blitzrechenübung sind diverse analoge Lernmaterialien wie Arbeitshefte, Handreichungen mit Materialsammlung, Kartenspiele und Rechenkarteien sowie PC-Software und Tablet-Apps verfügbar (ebd., S. 109).

Beispielhaft werden im Folgenden zwei Blitzrechenübungen aus der Handreichung *Fördern und Diagnose mit dem Blitzrechenkurs* (Wittmann & Müller, 2015) vorgestellt. Für die Übung *Kraft der Fünf* können Wendekarten verwendet werden, die der Handreichung beigelegt sind. Diese zeigen auf der Vorderseite eine Zahl zwischen 1 und 20 und auf der Rückseite ihre Darstellung mit Fünferbündelung. In Abbildung 3.15 ist die Wendekarte 14 erkennbar.

In der Grundlegungsphase wird den Schüler*innen das Mengenbild auf der Rückseite präsentiert. Ihre Aufgabe besteht darin, die Zerlegung der Zahl in Fünfer und Einser anzugeben. Die Zahl 18 kann beispielsweise als *3 Fünfer und 3 Einer* bezeichnet werden. Alternative Verbalisierungen, die beispielsweise die beiden Fünfer als einen Zehner zusammenfassen, sind ebenfalls möglich

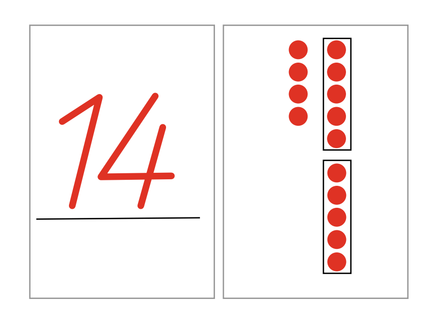


Abbildung 3.15 Vorder- und Rückseite der Wendekarte zur Zahl 14 (Wittmann & Müller, 2015)

(Wittmann & Müller, 2015, S. 22 f.). Dementsprechend könnte das Beispiel in Abbildung 3.15 etwa als *2 Fünfer und 4 Einer* oder *1 Zehner und 4 Einer* bezeichnet werden. In der Automatisierungsphase liegen die Wendekarten (oder ein Zwanzigerfeld mit Fünferstreifen und Wendeplättchen) vor, werden aber nach Möglichkeit nicht verwendet. Den Schüler*innen wird eine Zahl lediglich genannt. Ihre Aufgabe ist es, die Zahlzerlegung aus Fünfern und Einern anzugeben (ebd., S. 23).

Bei der Blitzrechenübung *Einspluseins* bzw. *Plusaufgaben* wird im Zwanzigerfeld eine Additionsaufgabe dargestellt. Die Aufgabe der Schüler*innen besteht darin, die Aufgabe und ihre Lösung zu benennen (Wittmann & Müller, 2019, S. 111). Abbildung 3.16 zeigt eine Möglichkeit, die Additionsaufgabe $6 + 7$ mit Hilfe eines Zwanzigerfeldes und Wendeplättchen darzustellen.

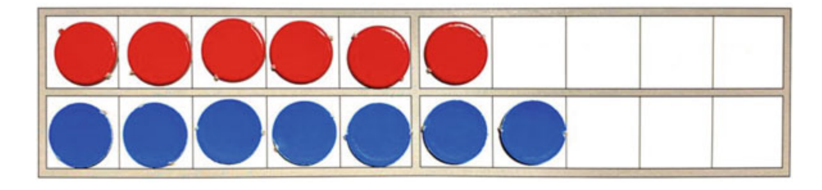


Abbildung 3.16 Darstellung der Aufgabe 6 + 7 auf dem Zwanzigerfeld mit austrennbaren Wendeplättchen aus Pappe (Wittmann & Müller, 2015)

In der Automatisierungsphase werden die Additionsaufgaben schließlich mündlich genannt. Die Schüler*innen bearbeiten sie im Kopf (Wittmann & Müller, 2019, S. 111).

3.3.3 Die Kraft der Fünf bei Simultandysgnosie

Krauthausens Darstellung zur Erfassung der Mengenbilder, die auf der Kraft der Fünf basieren, verdeutlichen, dass eine volle Reihe von fünf Wendeplättchen als *ein Element* verarbeitet wird (siehe Abbildung 3.14, S. 54). Dies ist dann möglich, wenn der Person, die das Mengenbild betrachtet, bekannt ist, dass eine volle Reihe immer aus fünf Elementen besteht. Eine Reihe Wendeplättchen steht demnach für die Menge 5 und stellt ein Superzeichen dar. Bezogen auf die Chunks, die verarbeitet werden müssen, bedeutet dies, dass bei der Darstellung der Zahl 5 lediglich ein Chunk verarbeitet werden muss (ein Fünfer). Beim Mengenbild der 6 müssen zwei Chunks verarbeitet werden (ein Fünfer und ein Einer), bei der 7 drei Chunks (ein Fünfer und zwei Einer) und bei der 8 vier Chunks (ein Fünfer und drei Einer). Das Mengenbild der 9 enthält, wenn es analog zu den anderen Mengenbildern beschrieben wird, fünf Chunks (ein Fünfer, vier Einer), während das Mengenbild der 10 lediglich zwei Chunks (zwei Fünfer) oder einen Chunk (ein Zehner) enthält.

Mit Ausnahme des Mengenbildes der 9, das aus fünf Chunks besteht, können die Mengenbilder 0 bis 10 anhand der Wendeplättchen mit einem neurotypischen Aufmerksamkeitsumfang erfasst werden, da dieser die simultane Verarbeitung von vier Chunks ermöglicht.

Obwohl das Mengenbild der 9 aus fünf Chunks besteht, kann es dennoch auf einen Blick identifiziert werden. Ist die Zahlzerlegung $10 - 1 = 9$ oder schlichtweg die Regelung bekannt, dass ein Leerfeld im Zehnerfeld die Menge 9 darstellt (vgl. Abbildung 3.17), muss lediglich ein Chunk verarbeitet werden.

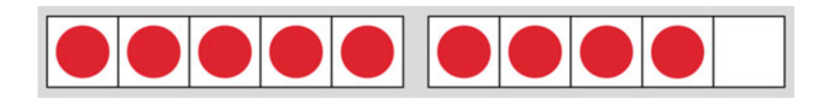


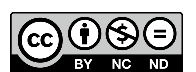
Abbildung 3.17 Neun Wendeplättchen im Zehnerfeld. Die Menge 9 kann anhand des leeren Feldes identifiziert werden

Nach diesem Verfahren müssten für das Mengenbild der 8 zwei Chunks (zwei leere Felder) und dem Mengenbild der 7 drei Chunks (drei leere Felder) verarbeitet werden. Die Verarbeitung von bis zu vier Chunks zur Identifizierung der Mengenbilder ist also nicht zwingend notwendig. Die augenblickliche Identifizierung einzelner Mengenbilder im Zehnerfeld setzt demnach die Fähigkeit voraus, drei Chunks simultan zu verarbeiten. Zur gedanklichen Nachbildung von Mengenbildern und zum Verändern dieser Mengenbilder vor dem geistigen

Auge (Addition, Subtraktion) wird allerdings die Verarbeitung von mehr als drei Chunks vorausgesetzt, da die Vorstellung der Mengenbilder anhand der Leerfelder hier nicht greift. Ein Beispiel ist die Aufgabe 6 + 2: Sind die Regeln der Kraft der Fünf bekannt, kann der erste Summand als ein *Fünfer und ein Einer* vor dem inneren Auge dargestellt werden. Nun werden *2 Einer* hinzugefügt. Daraus ergeben sich *ein Fünfer und drei Einer*. Zur Verarbeitung dieses Bildes sind vier Chunks notwendig.

Die Anzahl von Chunks, die Personen mit Trisomie 21 verarbeiten können, liegt zwischen zwei und drei (vgl. Unterkapitel 2.7.5). Mengendarstellungen, die auf der Kraft der Fünf basieren, bieten sich für Schüler*innen mit Trisomie 21 demnach nicht an. Dies kann ebenfalls für andere Schüler*innen mit Simultandysgnosie angenommen werden (vgl. Unterkapitel 3.2). Arbeiten sie mit Anschauungsmaterialien, die nach diesem System arbeiten, sind sie zum zählenden Rechnen gezwungen, weil ihnen die Simultanerfassung von Mengen mit Fünferbündelung nicht in dem Maße möglich ist wie neurotypischen Schüler*innen.

In den o. g. Übungen zum Blitzrechnen wird in der Automatisierungsphase das mentale Operieren mit Zwanzigerfeldern erforderlich. Dieser Vorgang, der für viele neurotypische Schüler*innen kein Problem darstellt, ist für Schüler*innen mit einer Fähigkeit zur Simultanerfassung unter drei Chunks nicht möglich. Für sie bleibt das Zwanzigerfeld ein Anschauungsmaterial, das zum Nachlegen und Nachzählen von Rechenaufgaben und Zahlzerlegungen anregt – nicht aber zur Bildung von mentalen Vorstellungen, die manipuliert werden können.


cc
BY NC ND

Check for updates

4 Entwicklung der Problemstellung

Die Kraft der Fünf bezeichnet eine weitverbreitete Form der Mengendarstellung, die mentale Mengenbilder erzeugen und zur Fähigkeit, mit diesen geistig zu operieren, beitragen soll. Im Unterricht Lernender mit Simultandysgnosie entfaltet diese Darstellungsform nicht ihr volles Potential. Demnach bietet es sich an, eine alternative und barriereärmere Variante der Mengendarstellung zu entwickeln und im Unterricht einzusetzen.

4.1 Pluralisierung der Lernwege im mehrdimensionalen System Schule

Alternatives Lernmaterial im Unterricht einzusetzen, führt unweigerlich dazu, dass Teile des herkömmlichen Lernmaterials mangels Kompatibilität nicht verwendet werden können. Die Darstellungsweise der Kraft der Fünf findet in den Lehrwerken des mathematischen Anfangsunterrichts im deutschsprachigen Raum in verschiedensten Aufgabenformaten Verwendung. Würde für ausgewählte Schüler*innen eine alternative Darstellungsweise verwendet, könnten diese nicht in gleicher Weise und Regelmäßigkeit mit den Lernmaterialien arbeiten, mit denen ihre Mitschüler*innen lernen. Dies führt zu der Frage, ob der Einsatz von *Sondermaterialien* die Inklusion von Schüler*innen mit Lernschwierigkeiten erschwert.

Kerstin Ziemen (2017a, S. 108) entwickelte auf Grundlage von Forschungsergebnissen zu den Kompetenzen von Akteur*innen im schulischen Kontext (2013) mit Bezugnahme auf die Entwicklungslogische Didaktik (Feuser, 1995, 2011) das

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_4

Modell der *Mehrdimensionalen reflexiven Didaktik*. Dieses Modell versteht Didaktik nicht nur als Begriff zur Bezeichnung der Auswahl des Lerngegenstandes und des Lernmaterials, sondern berücksichtigt darüberhinausgehend Strukturen, die zum Gelingen eines inklusiven Unterrichts beitragen. Es wurde als Grundlage einer Didaktik entwickelt, „die der Vielfalt und Differenz der Menschen offen gegenübersteht" (Ziemen, 2018, S. 51). Den Begriff *Reflexivität* verwendet Ziemen (ebd., S. 91) im Sinne Wacquants, der diesen nicht nur in Bezug auf das Individuum, sondern auch auf das „soziale und intellektuelle Unbewusste" anwendet (1996, S. 63). Ziemen wirbt für eine Didaktik, die sich die Reflexion zu eigen macht, um auf vorhandene Kompetenzen, Erkenntnisse und Informationen aufzubauen. Die Reflexion könne sich dabei „auf sich selbst beziehen (Selbstreflexion); auf Theorien und Erkenntnisse, z. B. humanwissenschaftliche Diskurse; auf den Menschen in seinem So-Sein und seine Grundbedürfnisse; auf gesellschaftliche, organisatorische, kulturelle, sprachliche Bedingungen; auf Normen und Werte; auf die Planung, Gestaltung und Evaluation von Unterricht; auf die Gestaltung des Möglichkeitsraum für Lernen und Entwicklung u. a. m." (Ziemen, 2018, S. 91).

Insgesamt arbeitet Ziemen fünf Dimensionen einer inklusiven Didaktik heraus, die in einem Zusammenhang der gegenseitigen Bezugnahme und Reflexion stehen (Ziemen, 2018, S. 9 f.) (Abbildung 4.1).

Die erste Dimension umfasst makrostrukturelle Aspekte, die u. a. die Gestaltung des Systems Schule beeinflussen. Ein Beispiel hierfür ist die Behindertenrechtskonvention der UN, die die rechtliche Grundlage für einen inklusiven Unterricht darstellt. Die Rolle der Akteur*innen und die Kooperation bilden die zweite Dimension. Zur Umsetzung der inklusiven Idee müssen Verantwortungsbereiche definiert und Kooperationen geschaffen werden. Die dritte Dimension umfasst das pädagogische Team, dem eine besondere Bedeutung zukommt, weil es den Gesamtprozess gestaltet und reflektiert (ebd., S. 109). Darüber hinaus trägt es durch eine regelmäßige Selbstreflexion zum Gelingen des inklusiven Unterrichts bei. Die vierte Dimension des Modells behandelt das Verhältnis der Schüler*innen mit dem Lerngegenstand. Bei der Auswahl von Lerngegenständen sollten u. a. humanwissenschaftliche Erkenntnisse berücksichtigt werden (ebd., S. 111). Der konkrete Aufbau der Lernumgebung und die Auswahl didaktischer Konzepte sind in der fünften Dimension verortet.

Die Auswahl geeigneter Lernmaterialien stellt nur einen kleinen Teil der gesamtdidaktischen Bestrebungen im Lehrbetrieb dar: Die vorliegende Forschungsarbeit bezieht sich hauptsächlich auf die Dimensionen IV und V und soll Akteur*innen aus der Dimension III Hinweise und Werkzeuge für die didaktische

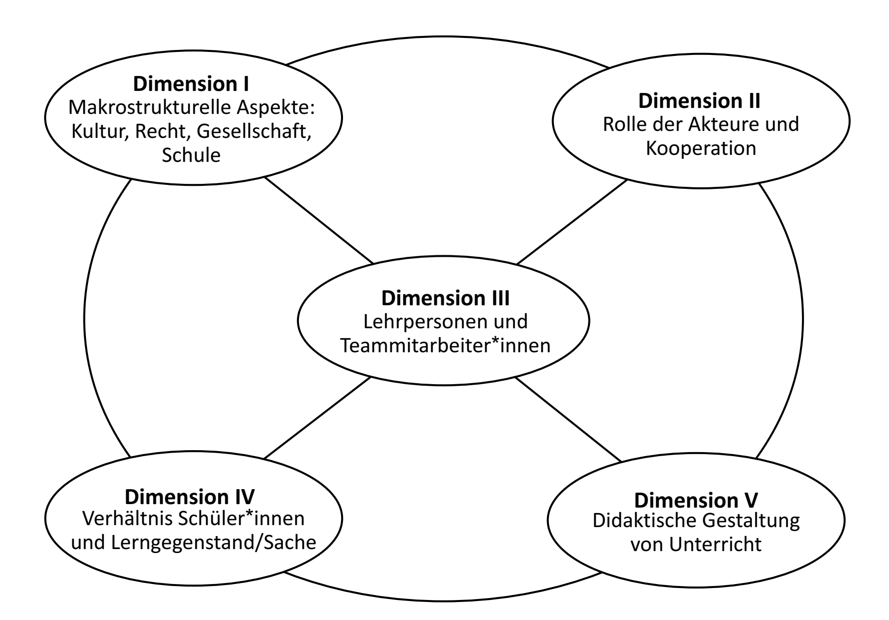


Abbildung 4.1 Dimensionen der Mehrdimensionalen reflexiven Didaktik (Ziemen, 2018, S. 93)

Gestaltung des Unterrichts liefern. Sie bezieht sich konkret in der Berücksichtigung des Aufmerksamkeitsumfangs der Schüler*innen auf die Dimension IV. Als einen Teil dieser Dimension führt Ziemen die pädagogische Diagnostik an, die auf verfügbare Kompetenzen, Bedürfnisse und Interessen der Schüler*innen abziele (ebd., S. 114 f.). Neben weiteren Persönlichkeits- und Entwicklungsbereichen betont Ziemen die Berücksichtigung von Aufmerksamkeitsbesonderheiten (ebd., S. 19, 57, 117). Letztere ist in der Problemstellung dieser Arbeit immanent. Die vorliegende Forschungsarbeit nimmt weiterhin Bezug auf die Dimension V, die die didaktische Gestaltung des Unterrichts betrifft. Diese Dimension beinhaltet u. a. didaktische Konzepte, Methoden, Medien, Lehr- und Lernmaterialien sowie innere Differenzierungen (ebd., S. 124). Neben der Differenzierung nach Medien und Materialien, Arten der Präsentation und der Art und Weise der Unterstützung anderer (Ziemen, 2018, S. 124) wird in diesem Forschungsprojekt der Differenzierung nach Aneignungs- und Wahrnehmungsebene eine hohe Bedeutung beigemessen.

Das Modell der Mehrdimensionalen reflexiven Didaktik zeigt, dass die bloße Auswahl der Lernmaterialien allein die Herstellung eines inklusiven Unterrichts weder garantieren noch torpedieren kann. Zur Ermöglichung eines inklusiven Unterrichts müssen in allen Dimensionen spezifische Voraussetzungen geschaffen werden. Bietet bereits die Dimension I als Rahmenbedingung die Schulform *Montessori-Schule*, kann dies im Idealfall einen inklusiven wie individuellen Unterricht ermöglichen. Im idealerweise jahrgangsübergreifenden Unterricht an Montessori-Schulen wird mit unterschiedlichen Lernmaterialien gearbeitet, die verschiedene Entwicklungsniveaus und Interessen der Schüler*innen abdecken (Hammerer, 2004). In der Freiarbeit arbeiten Schüler*innen interessengeleitet in einer pädagogisch vorbereiteten Umgebung mit nach wissenschaftlichen Kriterien hergestelltem und ausgewähltem Lernmaterial – wahlweise in Gruppen oder allein. Die Lehrpersonen nehmen in der Freiarbeit eine zurückhaltende und begleitende Funktion ein. Die Freiarbeit bietet den Schüler*innen die Möglichkeit, eigene Lernwege zu bestreiten (Zimpel, 2012b, S. 84 f, 167). In der Freiarbeit in einer vorbereiteten Umgebung, die den o. g. Kriterien entspricht, arbeiten die Schüler*innen einer Lerngruppe zur selben Zeit an völlig unterschiedlichen Lernmaterialien. Dies ermöglicht einen gemeinsamen Unterricht, dem eine individuelle Förderung immanent ist und der damit eine Pluralisierung der Lernwege fördert.

Ist durch die Rahmenbedingungen der Schule ein individueller Unterricht möglich und wird dieser von den entscheidenden Akteur*innen als wünschenswert erachtet, können Freiarbeitsphasen eine diversifizierte Didaktik ermöglichen, in der es keine Ausnahme, sondern die Regel ist, wenn Schüler*innen an unterschiedlichen Materialien arbeiten.

4.2 Partizipation der Zielgruppe durch formative Evaluation

Das Prinzip der Kraft der Fünf wurde augenscheinlich in die Didaktik des mathematischen Anfangsunterrichts aufgenommen, ohne Lernende mit Simultandysgnosie zu berücksichtigen. Dies mochte dem Zeitgeist und dem Unwissen über Aufmerksamkeitsbesonderheiten geschuldet sein. Um die Eignung der im Rahmen dieses Forschungsprojekts entwickelten Alternative für Lernende einer Simultandysgnosie zu gewährleisten, sollten diese von Beginn an die Entwicklung begleiten: Prototypen sollten getestet und durch die Aufzeichnung von Lernfortschritten evaluiert werden.

Im Schulunterricht hat es sich bewährt, Lernende in die Reflexion der eigenen Lernfortschritte miteinzubeziehen: In seiner Metaanalyse von 736 Metaanalysen, die auf über 50.000 Studien mit den Daten von mindestens 80 Millionen Lernenden zurückgreift (Beywl & Zierer, 2013, S. XI), arbeitet Hattie die formative Evaluation als eine Variable heraus, die zum Schulerfolg beiträgt, und stellt sie 137 weiteren Faktoren gegenüber (2013, S. 215). Bei einer Effektstärke von $d = 0{,}90$ belegt sie Rang 3 der Einflussfaktoren für den Schulerfolg. Laut Hattie kann mithilfe der formativen Evaluation ergründet werden, ob die für die Lernenden gesetzten Lernintentionen erreicht werden, indem die Frage „Wie komme ich voran?" gestellt wird. Die Antwort auf diese Frage würde dann das „Wohin geht es als Nächstes?" für die Lernenden entscheiden (ebd.). Im Schulkontext hat sich die formative Evaluation demnach bewährt. Eine Forschungsmethode, die in der Regel ebenfalls auf die formative Evaluation zurückgreift, ist das *Educational Design Research.* Dort gilt die formative Evaluation als Schlüsselaktivität, da sie einen induktiven Ansatz zur Entwicklung von Lernprogrammen ermöglicht (van den Akker, 1999, S. 10; Fuchs & Fuchs, 1986, S. 200). Laut Maslowski und Visscher (1999, S. 141) eignet sich die formative Evaluation besonders für die Arbeit mit Prototypen, bei deren Entwicklung im Vorfeld noch nicht alle Bedingungen bekannt sind, die erfüllt sein sollten, um den Bedürfnissen der Lernenden und Lehrenden gerecht zu werden. Dazu würden vorläufige Versionen des Lernprogramms in Kooperation mit Schüler*innen und Lehrkräften evaluiert werden, um weitere Spezifikationen des Designs auszuarbeiten sowie den Nutzen und die Effektivität des Programms zu steigern (ebd.).

4.3 Problemstellung

Ein Missstand im mathematischen Anfangsunterricht an Schulen im deutschsprachigen Raum bildet den Forschungsanlass der vorliegenden Arbeit: Schüler*innen mit Trisomie 21 sowie andere Lernende mit Simultandysgnosie erhalten im mathematischen Anfangsunterricht Lernmaterialien, die auf der Kraft der Fünf basieren. Dass diese Form der Fünferbündelung ihre ursprüngliche Intention und damit ihren Zweck bei Lernenden mit Simultandysgnosie nicht erfüllt, ist vielen Pädagog*innen gewiss nicht bewusst oder wird von ihnen aufgrund mangelnder Alternativen in Kauf genommen.

Das vorliegende Forschungsprojekt hat zum Ziel, ein Lernmaterial zu entwickeln, das eine Form der Mengendarstellung aufweist, die den Intentionen der

Fünferbündelung gerecht wird, im Gegensatz zu dieser aber für Lernende mit Simultandysgnosie geeignet ist. Als Alternative zum Zehner- und Zwanzigerfeld soll es die Möglichkeit zur Darstellung von Anzahlen und Rechenoperationen sowie zur Entwicklung mentaler Bilder berücksichtigen, damit es sich zum Kopfrechnenlernen eignet.



5 Forschungsdesign

Die Bearbeitung der zuvor dargelegten Problemstellung erfordert die Wahl eines geeigneten Forschungsdesigns, das der Praxisorientierung des Projekts gerecht wird. Im Folgenden werden die Anforderungen formuliert, die ein solches Forschungsdesign erfüllen sollte. Darauf folgen eine Darstellung der Forschungsmethode *Educational Design Research* und eine begründete Auswahl des Forschungsdesigns.

5.1 Anforderungen

Ein Forschungsdesign, das diese Forschungsfrage befriedigend beantwortet, sollte folgende Anforderungen erfüllen:

- Ergebnisorientierung: Mit Abschluss des Forschungsprojekts sollte ein nutzbares Unterrichtsmaterial zur Verfügung stehen.
- Kooperation mit der Zielgruppe: Es sollte Lernende mit Simultandysgnosie ermöglichen, sich aktiv am Entwicklungsprozess des Unterrichtmaterials zu beteiligen, um die Barrierefreiheit und Eignung zu gewährleisten.
- Evidenzbasierte Einordnung des Lernmaterials: Es sollte die Eignung des Unterrichtsmaterials für die Zielgruppe und den formulierten Zweck belegen können.
- Nachhaltigkeit: Der Entwicklungsprozess sollte transparent beschrieben werden, um grundlegende Erkenntnisse zur Entwicklung barrierefreier Lernmaterialien für ähnliche Projekte nutzen zu können.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_5

Befragungen, Fallstudien, Experimente, Evaluationsstudien und korrelative Studien beschreiben, vergleichen oder messen. Damit erfüllen sie diese Anforderungen nur partiell. Die Entwicklung eines Unterrichtmaterials, das die Antwort auf einen komplexen pädagogischen Missstand darstellt, erfordert hingegen die offene Entwicklung eines Konzepts, dessen Wirksamkeit prozessbegleitend gemessen wird. Ein Forschungsdesign, das diese Anforderungen erfüllt und genügend Flexibilität einräumt, um Charakteristika anderer Forschungsdesigns bei Bedarf zu implementieren, ist das Educational Design Research. Dieses versucht, komplexe pädagogische Probleme zu lösen, indem eine Intervention in Form eines Lernprogramms, von Lernmaterialien oder eines Produktsystems konzipiert und entwickelt wird. Es ermöglicht ebenfalls den Entwurf und die Entwicklung von Interventionen (z. B. Veränderungen von Lernumgebung und -prozessen), mit dem Ziel, Theorien zu entwickeln oder zu validieren (Plomp, 2013, S. 14–15).

5.2 Educational Design Research

5.2.1 Begriffliche Klärung

Der Begriff *Design* ist in der deutschen Sprache häufig mit der äußeren Erscheinung und kreativen Gestaltung eines Gegenstandes konnotiert. In der Definition des Dudens wird allerdings deutlich, dass mit dem Wort darüber hinaus auch die technische Gestaltung und allgemeine Konzeption eines Gegenstandes beschrieben werden kann. Design wird definiert als „formgerechte u. funktionale Gestaltgebung u. daraus sich ergebende Form eines Gebrauchsgegenstandes o. Ä." (Duden, 2007). Im Rahmen des vorliegenden Forschungsprojekts soll der Begriff *Design* nicht als Synonym für *kreative Gestaltung* verstanden werden, sondern vielmehr als Beschreibung von Konzeption und funktionaler Gestaltgebung einer pädagogischen Intervention, die in unterschiedlichen Erscheinungsformen auftreten kann.

In der Entwicklungsgeschichte des Educational Design Research sind verschiedene Forschungsmethoden aufgekommen, die rückblickend als Vorgänger oder artverwandte Methoden bezeichnet werden können. Weskamp (2019) bietet eine ausführliche Darstellung der Zusammenhänge dieser Methoden in deutscher Sprache. Die Forschungsmethoden sind untereinander nicht immer trennscharf zu unterscheiden und ihre Bezeichnungen werden gelegentlich synonym verwendet. Richey und Nelson (1996, S. 1240) stellen beispielsweise fest, dass der Begriff *Developmental Research* regelmäßig missverstanden wird. In der vorliegenden

Arbeit wird der Begriff *Educational Design Research* gemäß McKenney und Reeves (2012, S. 17) verwendet, die hierunter eine enge Artverwandtschaft zu den Forschungsmethoden Design-based Research, Development Research und Design Experiments verstehen. Den Begriff *Educational Design Research* wählten sie bewusst, um ihn deutlicher von Design-research-Methoden anderer Forschungsfelder abzugrenzen und um einer Verwechslung mit Research-informed Design vorzubeugen (ebd.).

5.2.2 Erscheinungsformen und Charakteristik

In der Regel werden zwei verschiedene Forschungszwecke von Educational Design Research unterschieden: Development Studies und Validation Studies.

Development Studies haben zum Ziel, eine evidenzbasierte Lösung für komplexe pädagogische Probleme zu entwickeln. Dabei stellen Erkenntnisse zu Charakteristika sowie zum Prozess der Gestaltung dieser Lösungen bzw. pädagogischen Interventionen ein weiteres Ziel dar (Plomp, 2013, S. 16). Validation Studies verfolgen hingegen das Ziel, eine Theorie zu entwickeln oder zu validieren. Hierzu werden pädagogische Interventionen entwickelt, die zur Entwicklung bzw. Validierung von Theorien führen (Plomp, 2013, S. 16).

Forschungsprojekte, die ihr Design an Educational Design Research anlehnen, können aber auch eine Kombination beider Ansätze darstellen. Werden im Rahmen von Development Studies bei der Entwicklung einer pädagogischen Intervention (externe) Theorien zu Grunde gelegt, können diese ebenfalls validiert werden (Plomp, 2013, S. 26).

Beide Erscheinungsformen haben den zyklischen Charakter gemein, der mehrere Iterationen des Designs hervorbringt, bis es eine Form erreicht, die das pädagogische Problem zufriedenstellend löst bzw. die zugrunde liegende Theorie validiert oder falsifiziert.

Van den Akker, Gravemeijker, McKenney und Nieven (2007, S. 5) fassen fünf wesentliche Charakteristika von Educational Design Research zusammen:

1. Interventionistisch: Die Forschung zielt darauf ab, eine Intervention in einem realen Umfeld zu entwickeln.
2. Iterativ: Die Forschung umfasst Zyklen von Design, Bewertung und Überarbeitung.
3. Prozessorientiert: Ein Black-Box-Modell der Input-Output-Messung wird vermieden; der Schwerpunkt liegt auf dem Verständnis und der Verbesserung von Interventionen.

4. Nutzungsorientiert: Der Nutzen eines Designs wird anhand seiner Praktikabilität in realen Kontexten gemessen.
5. Theorieorientiert: Das Design basiert (zumindest teilweise) auf Thesen und die Felderprobung trägt zur Theoriebildung bei.

Plomp (2013, S. 20) fügt ein sechstes Charakteristikum hinzu:

6. Einbindung von Anwender*innen: Die Forschung beinhaltet eine aktive Beteiligung oder Zusammenarbeit mit Anwender*innen in den verschiedenen Phasen und Aktivitäten der Forschung. Dies erhöht die Chance, dass die Intervention tatsächlich für den Bildungskontext relevant und praktikabel wird, was wiederum die Wahrscheinlichkeit einer erfolgreichen Umsetzung erhöht.

5.2.3 Abgrenzung zur Handlungsforschung

Die Anwendung zyklischer Forschungsprozesse unter Einbindung von Betroffenen ist aus der Handlungsforschung bekannt. Kurt Lewin führte den Begriff *Action Research* ein (1953, S. 280), der im deutschsprachigen Raum u. a. mit Tat-Forschung, Aktionsforschung oder Handlungsforschung übersetzt wird. In der Handlungsforschung stehen handlungstheoretische Überlegungen im Vordergrund: „Wie gehen PraktikerInnen mit ihren komplexen Berufsaufgaben um und wie können sie jene Kompetenzen erlernen, um diese Aufgaben in qualitätsvoller Weise zu bewältigen?“ (Altrichter, Aichner, Soukup-Altrichter & Welte, 2010, S. 804). Damit stellt sich die Handlungsforschung als partizipatorischer Ansatz dar, der darauf abzielt, die Ausgangssituation einer Gruppe zu verbessern. Hierbei wird ein liberalerer Zustand angestrebt, der mehr Selbstverwaltung zulässt (Greenwood & Levin, 1998, S. 8).

Typischerweise findet sie in der Fortbildung von Lehrkräften, der Schulentwicklung, der Entwicklung von Schulsystemen und der Didaktik Anwendung (Altrichter et al., 2010, S. 811–813). Sie soll Lehrpersonen dazu befähigen, „Probleme der Praxis selbst zu bewältigen, Innovationen durchzuführen und selbst zu überprüfen“ (Altrichter & Posch, 2007, S. 13).

Ein aktuelles Beispiel für den Einsatz von Handlungsforschung sind Literacy-Projekte, die beispielsweise im Rahmen der Entwicklungshilfe durchgeführt werden. Durch die Entwicklung von Curricula und die Ausbildung von Trainer*innen sollen sie die schriftsprachlichen Fähigkeiten von Jugendlichen und Erwachsenen fördern, um die gesellschaftliche und politische Teilhabe zu begünstigen (Alidou & Glanz, 2015).

Handlungsforschung ist deshalb von Educational Design Research zu unterscheiden, da sie primär darauf abzielt, die pädagogische Arbeit in einem spezifischen Praxisfeld zu verbessern. Educational Design Research hingegen verfolgt das Ziel, Designprinzipien (Design Principles) zu entwickeln, die in ähnlichen Praxisfeldern übernommen werden können (Plomp, 2013, S. 44).

5.2.4 Designprinzipien

Das Ziel von Educational Design Research besteht nicht nur darin, eine pädagogische Intervention zu konzipieren, sondern durch die Beantwortung einer Forschungsfrage substanzielles Wissen zu kreieren. Außerdem werden die gesammelten Erfahrungen zum Prozess der Entwicklung der Intervention aufgezeichnet. Beide Aspekte finden sich in den Designprinzipien wieder, deren Formulierung aus dem Forschungsprozess hervorgeht. Van der Akker (1999, S. 9) definiert Designprinzipien als heuristische Aussagen im Format „Wenn man Intervention X [für den Zweck oder die Funktion Y im Kontext Z] designen möchte, dann sollte man dieser Intervention die Charakteristik A, B und C geben und die Verfahren K, L und M anwenden, aufgrund der Argumente P, Q und R“. Das substanzielle Wissen findet sich in diesem Formatvorschlag in den Charakteristika A, B und C der Intervention wieder. Die Erfahrungen zum Entwicklungsprozess werden in den Verfahren K, L und M formuliert.

5.2.5 Phasen

Der Forschungsprozess nach Educational Design Research wird üblicherweise in drei Phasen unterteilt:

1. Vorbereitende Forschungsphase (Preliminary Research Phase)
2. Entwicklungs- oder Prototypingphase (Development or Prototyping Phase)
3. Abschließende Evaluierungsphase (Summative Evaluation Phase)

In der vorbereitenden Forschungsphase wird die Forschungsfrage konkretisiert, um die Lücke zwischen der aktuellen und der gewünschten Situation zu identifizieren. Dazu wird das pädagogische Problem durch Praxisanalyse und unter Berücksichtigung bisheriger Forschungsergebnisse formuliert. An dieser Stelle des Forschungsprozesses werden außerdem bereits bestehende Projekte in den

Blick genommen, die ähnliche pädagogische Probleme adressieren (Nieveen & Folmer, 2013, S. 154).

Die Entwicklungsphase zeichnet sich durch die Entwicklung, Evaluierung und Überarbeitung von Prototypen aus. Designprinzipien und die pädagogische Intervention durchlaufen einen iterativen Prozess, der im Idealfall mit jedem Durchlauf zu einer Verbesserung des Endergebnisses führt (Nieveen & Folmer, 2013, S. 157). Während der Entwicklungsphase werden Daten typischerweise mithilfe formativer Evaluation gewonnen. Im Gegensatz zur Anwendung eines Pre- und eines Post-Tests werden regelmäßig Fragen zur Anwendung des Materials gestellt. Diese generieren solche Informationen, die im zyklischen Prozess zu einer neuen Iteration führen, und sollten daher im Forschungsdesign verankert sein (van den Akker, 1999, S. 10).

Die abschließende Evaluierungsphase tritt dann ein, wenn die pädagogische Intervention eine Form erreicht hat, die sich als praxistauglich erwiesen hat und das Potential birgt, sich in der Evaluation zu bewähren. Sie hat zum Ziel, die tatsächliche Wirksamkeit der Intervention zu belegen. Im Falle kleiner Projekte mit geringem Impact kann auf diese abschließende Evaluierungsphase verzichtet werden. Bei Projekten mit großem Impact, wie beispielsweise der Entwicklung eines neuen national anzuwendenden Curriculums, sollte eine gründliche Evaluierung stattfinden (Nieveen & Folmer, 2013, S. 155). Die Wahl der Forschungsmethode in der abschließenden Evaluierungsphase sollte laut Nieveen und Folmer (2013, S. 155) unter Berücksichtigung des zu erwartenden Impacts der pädagogischen Intervention getroffen werden, da Evaluierungen kostspielig und aufwändig sein können. Die größte Aussagekraft geht von (Quasi-) Experimenten aus (Nieveen & Folmer, 2013, S. 155). Allerdings ist es fraglich, ob auf die abschließende Evaluierungsphase und auf den Einsatz eines aufwändigen (Quasi-)Experiments verzichtet werden kann. Der Wissenschaftsphilosoph Ian Hacking hebt die Bedeutung des Experiments hervor, indem er den *Dreischritt wissenschaftlicher Aktivitäten* formuliert: Auf eine Spekulation, die das gesammelte Hintergrundwissen und die Problemstellung zu einer These ausarbeitet, folgt eine Kalkulation, die in einem letzten Schritt, dem Experiment, validiert oder falsifiziert wird (Hacking, 1983, S. 212 ff.). In der vorliegenden Arbeit wird eine Kompatibilität zwischen den Anforderungen Hackings und der Forschungsmethode Educational Design Research hergestellt. Mit der Ausformulierung des pädagogischen Problems und der Entwicklung der Forschungsfrage in der ersten, vorbereitenden Forschungsphase entsteht eine deduktive Spekulation zu dem spezifischen Sachverhalt. Im Laufe der Entwicklungsphase werden Designprinzipien formuliert, die diese Spekulation induktiv verändern. In der

abschließenden Evaluierungsphase wird eine Kalkulation aufgestellt und mit Hilfe eines Quasi-Experiments validiert.

5.3 Begründete Auswahl von Design und Methodik

Für das vorliegende Forschungsprojekt wurde als Forschungsdesign das Educational Design Research gewählt, um zu vermeiden, dass die Entwicklung eines alternativen Unterrichtsmaterials *am grünen Tisch* stattfindet. Der Einbezug der Anwender*innen soll die Qualität und Wirksamkeit des Materials gewährleisten und entspricht einer zeitgemäßen Vorstellung von Pädagogik, in der Lernende und Lehrende kooperativ und dialogisch miteinander agieren, also voneinander und aneinander lernen (vgl. Ruf & Gallin, 2014; Zimpel, 2012b). Da das Ziel in der Entwicklung eines Konzepts besteht, das nicht nur lokal, sondern für die beschriebene Zielgruppe auch andernorts von Interesse sein könnte, spielt die Nutzungsorientierung dabei eine besondere Rolle. Die Formulierung von gesammelten Erkenntnissen zum Prozess der Entwicklung des Materials als Designprinzipien könnte außerdem bei der Entwicklung anderer barrierefreier Lernmaterialien herangezogen werden.



6 Vorbereitende Forschungsphase

Die Problemstellung, der Missstand in der schulischen Praxis und damit die Ziele des vorliegenden Forschungsprojekts sind bereits formuliert. Darüber hinaus sollten vor der Entwicklung eines neuen Systems zur Darstellung von Mengen Kriterien formuliert werden, die dieses zu erfüllen hat. Nach erfolgter Erarbeitung der Kriterien findet im Folgenden eine Auseinandersetzung mit bereits bestehenden Lernmaterialien statt, die eine ähnliche Problemstellung adressieren. Im Anschluss wird die Fragestellung der vorliegenden Arbeit formuliert.

6.1 Kriterien für die Gestaltung von Lernmaterialien

Neben allgemeinen Kriterien zur Gestaltung von Unterrichtsmaterialien sind solche Anforderungen von Interesse, die an Lernmaterialien gestellt werden, die spezifische geistige Operation erlernbar machen sollen. Darüber hinaus werden im Folgenden Anforderungen herausgearbeitet, die ein System zur Darstellung von Mengen erfüllen sollte, wenn es als Alternative zum Zwanzigerfeld mit Fünferbündelung fungieren soll.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_6.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_6

6.1.1 Allgemeine Kriterien

Schulunterricht wird nicht nur mit Hilfe von Arbeitsblättern, Arbeitsheften und Schulbüchern bewältigt, sondern vielmehr mit Hilfe konkreter Materialien. Zweifellos stehen in der Gestaltung solcher Lernmaterialien das zu erreichende Lernziel und die Aktivitäten, die zu diesem Lernziel führen sollen, im Vordergrund. Dass es lohnend ist, spezifischeren Kriterien Beachtung zu schenken, zeigen die Entwicklungsmaterialien von Maria Montessori. Montessori, die sich in der Auswahl und Entwicklung ihrer Lernmaterialien ausdrücklich an den Überlegungen und Entwicklungen von Itard und Séguin orientierte (2012a, S. 120), legte großen Wert darauf, dass ihr Sinnesmaterial Eigenschaften isoliert hervorhebt und in Abstufungen wiedergibt. Dabei kann es sich beispielsweise um eine Gruppe von Farbtäfelchen mit unterschiedlicher Schattierung oder eine Gruppe Glocken mit unterschiedlichen Tönen handeln. Die verschiedenen Objekte eine Gruppe unterscheiden sich lediglich in der Abstufung einer bestimmten, auf diese Weise isolierten Eigenschaft (ebd., S. 122). Hieraus ergibt sich ein erstes Kriterium zur Gestaltung des Lernmaterials dieser Arbeit:

a) *Isolation von Eigenschaften*
Die zu erarbeitenden Eigenschaften des Materials sind isoliert hervorgehoben und nach Möglichkeit in Abstufungen wiedergegeben.

Darüber hinaus beschreibt Montessori weitere Merkmale, die das Entwicklungsmaterial sowie andere Objekte, die sich in der vorbereiteten Umgebung befinden, idealerweise aufweisen sollten:

b) *Fehlerkontrolle*
Damit Kinder lernen, Übungen kritisch und sorgfältig durchzuführen, Fehler zu erkennen und zu korrigieren, sollte eine sachliche Fehleranalyse möglich sein. Dabei sollte nicht nur das Aufkommen eines Fehlers an sich, sondern der tatsächlich begangene Fehler anhand der Erscheinung des Materials verdeutlicht werden.

c) *Ästhetik*
Montessori legt Wert darauf, dass die Materialien dank harmonisch abgestimmter Form- und Farbgebung eine Anziehungskraft und einen Aufforderungscharakter haben, die ein Tätigkeitsbedürfnis beim Kind auslösen und zu einer sorgfältigen Behandlung anregen.

d) *Kindgerechte Handhabung*
Das Material sollte die Möglichkeit von Aktivitäten bieten, die dem kindlichen Tätigkeitsdrang entsprechen. So sollten zum Beispiel kleine Elemente zum Verrücken oder Neu-Ordnen zur Verfügung stehen. Das Material sollte so

konzipiert werden, dass es Freude bereitet, wenn solche Aktivitäten mehrfach wiederholt werden.
(Montessori, 2012a, S. 124–127)

Die Überlegungen Montessoris, die aus den Ergebnissen einer jahrzehntelangen handlungsforschenden Tätigkeit resultieren, zeigen, welche Sorgfalt bei der Entwicklung von Lernmaterialien aufgewendet werden sollte, um die gewünschten Entwicklungseffekte zu erreichen und unerwünschte Nebeneffekte zu vermeiden. Sie fanden bereits in der Entwicklung (heilpädagogischer) adaptierter Materialien Anwendung (Gunkel, 2000, S. 136) und werden in der Praxis auch zur Bewertung digitaler Lernmaterialien herangezogen (Valle, 2019, S. 77). Die Kriterien bilden die allgemeinen Anforderungen an die Entwicklung eines neuen Systems zur Darstellung von Mengen im Rahmen dieser Arbeit.

6.1.2 Kriterien für Anschauungsmaterialien

Für die Unterrichtsplanung und -gestaltung ist die Berücksichtigung unterschiedlicher Aneignungs- und Wahrnehmungsebenen aus zwei Gründen bedeutend: Erstens zur Differenzierung eines gemeinschaftlichen Unterrichts, in dem Schüler*innen mit unterschiedlicher kognitiver Entwicklung zusammen lernen, und zweitens zum gezielten Erlernen mentaler Operationen. Aus diesem Grund ist die Differenzierung verschiedener Ebenen Gegenstand der erziehungswissenschaftlichen Diskussion (eine empfehlenswerte Übersicht bietet Ziemen, 2018, S. 125 f.). In den Fachdidaktiken wird in diesem Zusammenhang das sog. EIS-Prinzip regelmäßig zitiert. Dabei handelt es sich um ein Akronym für die Differenzierung von Darstellungsweisen nach enaktiver (Handlungs-), ikonischer (Bild-) und symbolischer (abstrakter) Ebene. Das EIS-Prinzip geht auf Überlegungen Bruners zurück, der es als „nicht unwahrscheinlich" bezeichnet, dass diese „drei Medien der modellhaften Abbildung" bedeutend in der Konstruktion eines Modell der Wirklichkeit und damit in der Entwicklung von Wissen sind (Bruner, 1971, S. 377). In der deutschsprachigen mathematikdidaktischen Diskussion finden Bruners Überlegungen rege Berücksichtigung, es wird allerdings zunehmend davor gewarnt, diese allzu formalistisch umzusetzen. Krauthausen (2018, S. 325) beschreibt das Phänomen, dass Kinder, die das Rechnen mit konkretem Material als schwierig empfinden, auf fehleranfälligere Alternativmethoden zurückgreifen; „Es gilt daher stets darauf zu achten, ob in einer Situation das Handeln mit konkretem Material auch sachlich geboten ist" (ebd.). Scherer (1996, S. 55) berichtet von Schüler*innen, in denen eine Ablösung vom konkreten Material zu früh erfolgt sei

und sich negativ auf den Lernerfolg ausgewirkt habe. Eine Auseinandersetzung rund um die Ablösung und geplante Redundanz von Anschauungs- und Lernmaterialien kann im Rahmen dieser Arbeit nicht erschöpfend geführt werden. Es wird aber deutlich, dass bei der Entwicklung eines neuen Lernmaterials berücksichtigt werden sollte, dass dieses zu seiner eigenen Redundanz beiträgt. Sobald sich ein*e Schüler*in mit dessen Hilfe das zu lernende Wissen angeeignet hat, soll ein weiterer Rückgriff auf das Material nicht mehr forciert werden. Stattdessen sollte die Lehrperson dazu motivieren, zuvor konkret veranschaulichte Aufgaben auf mentaler Ebene zu lösen. Hieraus ergibt sich das erste Kriterium zur Entwicklung eines Lernmaterials, das die Herbeiführung geistiger Handlungen forciert:

a) *Angestrebte Redundanz*
Das Lernmaterial unterstützt die Lernenden darin, ein inneres Bild des Materials zu entwickeln, das anstelle des gegenständlichen Materials verwendet werden kann.

Bevor dieser erwünschte Zustand allerdings erreicht ist, werden Phasen der konkreten Arbeit und Verbalisierung der Arbeit mit dem Material durchlaufen. Dieser mehrstufige Handlungsvorgang wird von Klafki (2007, S. 193) in Anlehnung an die Theorien Piagets (1947, 1973), Roses (1953) sowie Galperins und Leontjews (1972) wie folgt formuliert:
1. Konkrete Aneignungs- bzw. Handlungsebene
2. Explizit-sprachliche Aneignungs- bzw. Handlungsebene
3. Rein gedankliche Aneignungs- bzw. Handlungsebene

(Klafki, 2007, S. 188)

Bei diesem Dreischritt handelt es sich laut Klafki um eine Vereinfachung des idealtypischen Denkmodells, das zur Aneignung eines Lerngegenstands durchlaufen wird. Auf der ersten Ebene, der konkreten Aneignungs- bzw. Handlungsebene, arbeiten die Schüler*innen mit konkreten Gegenständen oder mit gegenständlichen respektive bildhaften Repräsentationen konkreter Gegenstände. Dabei kann es sich z. B. um „Klötze statt realer Dinge, Bilder, modellhafte Veranschaulichungen, Skizzen oder ähnliches“ handeln. Auf der zweiten Ebene, der explizit-sprachlichen Aneignungs- bzw. Handlungsebene, werden die Vollzüge der ersten Ebene erst durch hörbare Äußerungen und später durch eine innere Sprache „dargestellt, analysiert, strukturiert, begründet, erörtert“, wodurch ein erster Abstraktionsschritt vollzogen wird. Die dritte Ebene, die rein gedankliche Aneignungs- bzw. Handlungsebene, zeichnet sich dadurch aus, dass die Schüler*innen auf die Verbalisierung verzichten können und die Handlungen der ersten

Ebene als geistige Handlungen, also Operationen, rein gedanklich und abstrakt vollziehen (Klafki, 2007, S. 193 f.).

Klafkis mehrstufiger Handlungsvorgang orientiert sich an den Überlegungen Pjotr Galperins, der in seinem *Modell zur etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen* von einem mehrstufigen Verfahren zur Aneignung von Internalisierungen ausgeht. Als Vertreter der Kulturhistorischen Schule und Mitarbeiter Leontjews bedient sich Galperin inhaltlich wie begrifflich der Tätigkeitstheorie Leontjews, die eine strenge Unterscheidung dreier aufeinander aufbauender Ebenen vorsieht: Operation, Handlung und Tätigkeit (Abbildung 6.1).

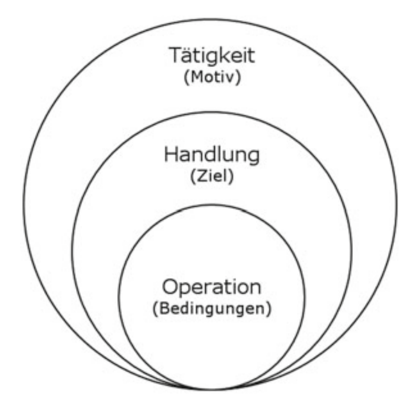


Abbildung 6.1
Euler-Diagramm des Strukturmodells der Tätigkeit (Rieckmann, 2014, S. 5)

Die Tätigkeit ist im Strukturmodell der Tätigkeit grundsätzlich auf einen Gegenstand gerichtet. Ein Gegenstand kann dabei „sowohl stofflich als auch ideell sein, sowohl in der Wahrnehmung gegeben sein als nur in der Phantasie, nur in Gedanken existieren. Die Hauptsache ist, dass dahinter immer ein Bedürfnis steht, dass er immer dem einen oder anderen Bedürfnis entspricht“ (Leont’ev, 2012, S. 95 f.). Beispiele für stoffliche Gegenstände sind ein Haus, eine Fotografie oder Nahrung. Ideelle Gegenstände können z. B. die Schriftsprache, Mathematik oder philosophische Überlegungen sein. Der Gegenstand bildet grundsätzlich das Motiv der Tätigkeit, weil er dem Bedürfnis der Person entspricht, die dieser Tätigkeit nachgeht. Leontjew führt ein Beispiel an, in dem jemand der Tätigkeit des Jagens nachgeht. Da diese Person das Bedürfnis hat, etwas zu essen, bildet die Nahrungsbeschaffung das Motiv der Tätigkeit. Um erfolgreich zu jagen, ist der Mensch häufig dazu gezwungen, Handlungen durchführen, die nicht unmittelbar auf das Motiv gerichtet sind. Um z. B. Fische als Nahrung zu erhalten, ist der Gebrauch eines Fanggeräts, beispielsweise einer Angelrute, von Nöten. Mit dem

Ziel, eine Angelrute zu besitzen, könnte er der Handlung nachgehen, eine solche zu bauen. Das Ziel steht in einer ebenso konstitutionellen Beziehung zur Handlung wie das Motiv zur Tätigkeit. Über diese Kategorien hinaus unterscheidet Leontjew die sogenannten Operationen. Dabei handelt es sich um die Verfahren, die zur Verwirklichung einer Handlung beitragen. Das Beispiel des Jagens weiterführend könnten mehrere Operationen identifiziert werden, wie etwa das Abtrennen eines geeigneten Astes von einem Baum, die Suche nach einer reißfesten Schnur und das Sammeln von Ködern. Operationen sind grundsätzlich von mehreren spezifischen Bedingungen abhängig. Sie sind durch die Fähigkeiten der operierenden Person und die Umwelt, in der sich diese befindet, geprägt. Sie können beispielsweise durch Maschinenkraft automatisiert oder ersetzt werden (vgl. ebd., S. 99 f.). Eine Operation bezeichnet im Gegensatz zur Terminologie Piagets (vgl. Unterkapitel 2.2.2.1) nicht zwangsläufig das Phänomen der mentalen Operation. In einem solchen Fall wird stattdessen von einer „geistigen Handlung" gesprochen, die im Modell von Galperin erreicht wird (Gal'perin, 2004). Je nach Interpretation des Modells Galperins wird von bis zu sechs Etappen zur Ausbildung geistiger Handlung ausgegangen (Jantzen, 2004). Die folgende Auflistung beschreibt Galperins Darstellung von fünf Etappen:

1. *Bildung einer vorläufigen Vorstellung von der Aufgabe*
   Damit sich die lernende Person mit der Handlung bekannt machen kann, wird eine Orientierungsgrundlage geschaffen, die an ihre Kenntnisse und Fähigkeiten angepasst ist. Für den zu erwartenden Lernerfolg ist dabei entscheidend, welchen Detailgrad und welche Struktur diese Orientierungsgrundlage bietet und ob die lernende Person darin unterstützt wird, diese Orientierungsgrundlage selbst zu schaffen und sich die Handlung selbst zu erschließen (Galperin, 1967a, S. 376, 1967b, S. 36). „Die Schüler sollen von Anfang an wissen, was in diesem Bereich wesentlich ist, worauf es ankommt, und sie sollen das Instrumentarium erhalten, um diesen Bereich selbst analysieren und die Orientierungsgrundlage für konkrete Handlungen selbst aufbauen zu können" (Lompscher, 1973).
2. *Eigentlicher Handlungsverlauf*
   Die lernende Person vollzieht die Handlung am Material und erschließt sich diese vollständig mithilfe von Entfaltung und Verallgemeinerung. Die Lehrperson unterstützt sie dabei, die Handlung in einzelne nachvollziehbare Operationen zu gliedern. In der Verallgemeinerung einer Handlung werden „aus den vielfältigen Eigenschaften ihres Objekts gerade die [ausgegliedert], die einzig und allein für ihre Ausführung notwendig sind" (Galperin, 1967a, S. 380). Laut Galperin tragen „[d]iese beiden Verfahren … dazu bei, daß sich

im Bewußtsein des Schülers die für die Handlung wesentlichen Eigenschaften, Zusammenhänge und objektiven Bedingungen widerspiegeln und daß er die Handlung auf Grund einer solchen Widerspiegelung zu steuern vermag" (1967b, S. 38).

3. *Verbalisierung der Handlung*
   Die dritte Etappe zeichnet sich dadurch aus, dass alle relevanten Operationen der Handlung in Worte gefasst werden. Die lernende Person begleitet ihre Handlung mittels „äußerer Sprache", d. h., dass sie für andere nachvollziehbar spricht und ihr eigenes Handeln erläutert. Damit findet eine erste Abstraktion statt, „der gegenständliche Inhalt [wird] bereits zum Gedanken, zum Inhalt des Denkens" (ebd., S. 39).
4. *Verkürzte Verbalisierung*
   In der vierten Etappe verkürzt die lernende Person die Handlung und führt sie bereits in Teilen gedanklich durch. Als Unterstützung verwendet sie die äußere Sprache „für sich". Die Sprache, mit der sie ihre Handlung begleitet, wird „vom Kommunikationsmittel zum Mittel des Denkens" (ebd., S. 40).
5. *Internalisierung*
   Zuletzt verkürzt die lernende Person diese zu einer gedanklichen, „inneren Sprache". Sie ist nun in der Lage, die Handlung ohne unterstützendes Material oder Lautsprache durchzuführen (ebd.). Der ursprünglich gegenständliche Inhalt erscheint nun als gedankliches Abbild, das den ursprünglichen Handlungsprozess und die Orientierung in diesem widerspiegelt (Galperin, 1973, S. 88).

Aus den fünf Etappen lassen sich weitere Merkmale ableiten, die Lernmaterialien beinhalten sollten, um die Internalisierung einer Handlung zu fördern:

b) Beitrag zur Orientierungsgrundlage
   Das Lernmaterial ermöglicht den Aufbau einer Lernumgebung, in der sich die lernende Person so weit wie möglich selbständig orientieren und den Lerngegenstand handelnd erschließen kann.
c) Angebot wesentlicher Operationen
   Zentrale Operationen der Handlung sind mit dem Lernmaterial durchführbar.
d) Möglichkeit der Verbalisierung
   Zentrale Operationen der Handlung am Lernmaterial können verbalisiert werden.

Galperin unterscheidet, ob materielle oder materialisierte Handlungen vollzogen werden. Materielle Handlungen, wie z. B. erste Rechenoperationen mithilfe von

Gegenständen, würden in der Anfangsphase des Lernens ihren Zweck erfüllen. Sie hätten aber den Nachteil, dass sie zum Aufbau tiefergehender Kenntnisse an ihre Grenzen geraten würden. In materialisierten Handlungen arbeiten die Lernenden mit Kopien, Darstellungen, Schriften oder gegenständlichen Modellen des Objekts. Laut Galperin ermöglichen es diese, wesentliche Charakteristika des Objekts für die Lernenden erkennbar zu machen (Galperin, 1967b, S. 36 f.). „Mit Hilfe des Materialisierens (gedachter Eigenschaften und Beziehungen) nehmen die objektiven Eigenschaften und Beziehungen, die uns in ihrer wirklichen materiellen Form nicht unmittelbar zugänglich sind, dennoch eine materialisierte Form an und können von uns wahrgenommen werden“ (ebd. S. 37). Für das zu entwickelnde Lernmaterial ergibt sich hieraus ein weiteres Merkmal:

e) Möglichkeit der Materialisierung
   Das Lernmaterial kann sinnvoll in eine andere Form aufbereitet werden, die wesentliche Eigenschaften und Beziehungen widerspiegelt.

6.1.3 Kriterien für Mengendarstellungen

Neben der Fragestellung, welche allgemeinen Kriterien Lernmaterialien und welche Merkmale Materialien erfüllen sollten, damit sie sich zur Internalisierung eignen, sollen im Folgenden Kriterien ausgearbeitet werden, die ein neues System zur Darstellung von Mengen erfüllen sollte, damit es als Alternative zur Fünferbündelung eingesetzt werden kann. Hierfür werden die Motive, die Fünferbündelung im Unterricht einzusetzen, aus Unterkapitel 3.3.2 antizipiert.

Kühnel (1922, S. 29) sieht Darstellungen im Vorteil, bei denen die spezifische Darstellungsweise kleinerer Anzahlen in größeren abgebildet ist: „Allgemein bekannt sind die Zahlbilder auf Würfeln und Dominosteinen. Diese zeigen jedoch die psychologische Schwäche, dass die 5 nicht unmittelbar in der 6 wiedererkannt werden kann, und ebenso die 9 nicht in der 10 usw. Zahlbilder, die für den Unterricht verwendbar sein sollten, wünschte man daher nach dem Grundsatz aufgebaut, daß jedes Zahlbild im folgenden enthalten sein sollte“(ebd.).

Hieraus ergibt sich das Kriterium

a) Aufbauende Struktur
   Die Mengenbilder bauen aufeinander auf, sodass jedes Mengenbild im nachfolgenden enthalten ist.

   Thompson und Van de Walle (1984) nutzten den 10 Frame zur Darstellung von Zahlzerlegungen der Menge 10. Durch freibleibende Felder des 10 Frames sollte deutlich sein, wie Felder gefüllt werden müssen, um die Anzahl 10 zu erhalten. Hieraus ergibt sich das Kriterium
b) Darstellung der Zehnerzerlegung
   Die Mengenbilder werden in einem Zehnerfeld dargestellt, das durch freie Felder jederzeit einen Überblick darüber ermöglicht, wie viele Einheiten ergänzt werden müssen, um die Menge 10 zu erhalten.

Flexer (1986) und Krauthausen (1995) sehen einen Vorteil der Fünferbündelung darin, dass Mengen nicht gezählt werden müssen und quasi-simultan erfassbar sind. Auch das neue Lernmaterial sollte diese Möglichkeit bieten, dabei jedoch auch für Personen mit Simultandysgnosie verwendbar sein:

c) (Quasi-)simultane Erfassbarkeit
   Die Mengenbilder von 0 bis 20 können von Personen mit Simultandysgnosie quasi-simultan erfasst werden.

Mit dem *Blitzrechnen* führen Wittmann und Müller in ihrem Projekt *mathe 2000* eine Form des automatisierenden Übens ein, die den allgemeinen Mathematikunterricht ergänzt (Wittmann & Müller, 2015). Auch das neuentwickelte Lernmaterial soll solche Übungen ermöglichen:

d) Eignung für Rechenübungen
   Das Material bietet die Möglichkeit, automatisierende Übungsformate zur Orientierung im Zahlenraum 20 durchzuführen.

6.1.4 Resümee

Die herausgearbeiteten Kriterien stammen aus bedeutenden Theorien verschiedener Wissenschaftler*innen aus dem Bereich der Psychologie und Pädagogik.

Sie zeigen, dass bei der Entwicklung eines zweckerfüllenden Lernmaterials idealerweise eine große Zahl an Faktoren berücksichtigt werden muss, und bilden eine Zielvorstellung zur Entwicklung einer Alternative zum Zwanzigerfeld mit Fünferbündelung. Eine Übersicht der herausgearbeiteten Kriterien findet sich im Anhang auf Seite 5 im elektronischen Zusatzmaterial.

6.2 Verfügbare Lösungen

Vor der Konzeption eines neuen Unterrichtsmaterials wurden bereits vorhandene Alternativen zum Zwanzigerfeld mit Fünferbündelung in den Blick genommen. In diesem Unterkapitel werden nun Lernmaterialien vorgestellt, die die Mengenvorstellung fördern und arithmetische Fertigkeiten vermitteln sollen. Dabei werden neben Lernmaterialien, die für Regelschüler*innen konzipiert worden sind, insbesondere solche vorgestellt, die Schüler*innen mit Lernschwierigkeiten einen barrierefreien Mathematikunterricht ermöglichen sollen.

6.2.1 Zehnerbündelung

Die Zehnerbündelung stellt eine naheliegende Bündelungsform von Mengen in mathematischen Anschauungsmaterialien zum Dezimalsystem dar. Das mutmaßlich bekannteste Lernmaterial, das auf einer Zehnerbündelung basiert, ist das *Perlenmaterial Montessoris.* Lose, goldenen Perlen repräsentieren hier die Einer, Stäbchen, die aus zehn aufgefädelten Perlen bestehen, die Zehner. Hunderter werden durch Perlenquadrate dargestellt, die aus zehn nebeneinanderliegenden Stäbchen bestehen. Zehn aufeinander gestapelte Perlenquadrate bilden wiederum einen Würfel, der die Menge 1000 repräsentiert (Montessori, 2012b, S. 19).

Dieses Lernmaterial und seine dazugehörigen Übungen erfüllen die in dieser Arbeit zuvor erarbeiteten allgemeinen Kriterien für Lern- und Anschauungsmaterialien. Die aufgestellten Kriterien für Mengendarstellungen werden hingegen nicht vollständig erfüllt: Weder werden die Mengen in Zehnerfeldern dargestellt, die das Erfassen freier Plätze zulassen, noch können alle Mengen von 0 bis 20 quasi-simultan erfasst oder automatisierte Übungsformate zur Orientierung im Zwanzigerraum durchgeführt werden. Dies war auch nicht die Intention Montessoris bei der Entwicklung des Materials. Tatsächlich lag ihr Ziel darin, bereits Kinder im Vorschulalter dazu zu befähigen, mit Zahlen jenseits der 100 zu arbeiten. Das Perlenmaterial lässt neben den vier Grundrechenarten sogar weitere mathematische Tätigkeiten zu, wie etwa das Wurzelziehen oder die Darstellung

algebraischer Zusammenhänge (Montessori, 2012a, S. 321 f.). Für die Arbeit im kleineren Zahlenraum sind u. a. numerische Stangen vorgesehen, die die Mengen 1 bis 10 darstellen, sowie Spindelkästen, die Fächer mit jeweils null bis zehn Spindeln enthalten. Dieses Material ermöglicht die Mengendarstellung bis 10 sowie Additionen und Subtraktionen (Montessori, 2012b, S. 9 ff.), bietet aber keine Unterstützung in der quasi-simultanen Erfassung für Lernende mit Simultandysgnosie.

Ein Lernmaterial, das der Struktur des Perlenmaterials ähnelt, sind *Dienes Multibase Arithmetic Blocks*, die anstelle aufgefädelter Perlen aus aneinandergereihten Würfeln bestehen. Ein einzelner Würfel wird als *Unit* bezeichnet, eine Reihe von Würfeln als *Long*, eine Fläche als *Flat* und die übereinandergestapelten Flächen als *Block*. Neben dem Material, das dem Montessori-Material stark ähnelt und auf der Basis 10 gründet, existieren die gleichen Einheiten mit den Basen 3, 4, 5 und 6 (Dienes, 1967, S. 55 ff.). Dieses Material, das Schüler*innen das Rechnen in Zahlensystemen jenseits des Dezimalsystems näherbringen soll, erfüllt ebenfalls nicht die Kriterien der Darstellung im Zehnerfeld und der Quasi-Simultanerfassung der Mengen 0 bis 20.

Der belgische Mathematiklehrer Georges Cuisenaire entwickelte 1954 ebenfalls ein Lernmaterial, das Zahlen als Stäbe darstellt (Association of Teachers of Mathematics, 2017, S. 4). Die Zahl 10 wird als orangefarbener Stab dargestellt, 9 als blauer Stab, mit einer Länge von 90 % des Zehnerstabes, 8 als roter Stab mit einer Länge von 80 % des Zehnerstabes usw. Jeder Stab ist in einer eigenen Farbe gehalten und bei einer Kombination aus Stäben entspricht die Gesamtlänge der Länge des Stabes der Summe der zugrundeliegenden Addition (ebd., S. 10). Da die mit den Zahlen korrespondierenden Farben sehr schnell erlernt werden können, entsteht der Eindruck der Simultanerfassung, wenn Kinder die Stäbe korrekt benennen. Diese geht allerdings auf die Farbe der Stäbe zurück, nicht auf die dargestellte Menge. Es bleibt ungewiss, ob die Vorstellung der Farbe dabei unterstützt, mental mit Mengen zu operieren. Aber auch in diesem Fall scheint das Kopfrechnen nicht die Intention des Entwicklers des Materials gewesen zu sein. Als Musiklehrer schätzte Cuisenaire die Möglichkeit, Intervalle (Abstände zwischen zwei Tönen) anhand einer Klaviatur veranschaulichen und begreifbar machen zu können. Die Beziehungen zwischen Zahlen wollte er auf ähnliche Weise anhand der unterschiedlich langen Stäbe darstellen (ebd., S. 4).

Die vorgestellten Lernmaterialien mit Zehnerbündelung verfolgen andere Zielsetzungen als solche, die in den aufgestellten Kriterien zur Entwicklung eines neuen Lernmaterials im Rahmen dieser Arbeit formuliert worden sind. Sie eignen sich daher nicht zur Schließung der herausgearbeiteten Lücke im Lernmaterialangebot. Ihre didaktische Eignung soll aber keineswegs in Frage gestellt werden.

Dank der Zehnerstruktur und der Kompatibilität zum Dezimalsystem lassen sie sich mutmaßlich im Mathematikunterricht bereichernd einsetzen.

6.2.2 Mengendarstellungen mit Fünferbündelung

Die Erfahrung, dass Lernende mit Trisomie 21 vom Einsatz des üblichen mathematischen Lernmaterials nicht immer profitieren, veranlasst Pädagog*innen schon seit Längerem dazu, zu Alternativen zu greifen. Ein häufig anzutreffendes Lernmaterial sind die *Rechenzüge*. Dabei handelt es sich um ein spielerisches Lernmaterial aus dem Unterrichtswerk Kutzers. Kutzer reagierte mit seinem Lehrwerk auf Missstände, die er im Mathematikunterricht der frühen 1980er-Jahre an Grund- und Sonderschulen erkannte: Schüler*innen zeigten sich im stark standardisierten Mathematikunterricht häufig über- und unterfordert, Lernerfolge blieben aus und auch das „traditionelle didaktische Konzept der Schule für Lernbehinderte“ schien überholt (Kutzer, 1983, S. 8 f.). Der Rechenzug besteht aus einer Lok und verschiedenen angekoppelten Wagen. Diese können mit Blöcken unterschiedlich beladen und untereinander verglichen werden. Additionen und Subtraktionen können auf der enaktiven Ebene durchgeführt werden (Kutzer, 1985, S. 68 f.). Ein Wagen kann mit bis zu 2 · 5 Blöcken beladen werden (Abbildung 6.2).

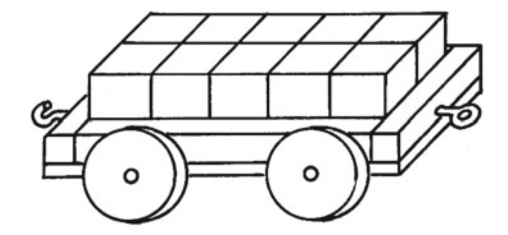


Abbildung 6.2 Schematische Zeichnung eines Wagens des Rechenzugs (Kutzer, 1985, S. 86)

Der Rechenzug nach Kutzer bildet damit die gleiche Struktur ab, die vom Zehnerfeld bekannt ist. Er basiert auf der Kraft der Fünf und ist daher für Lernende mit Simultandysgnosie nicht barrierefrei.

Ein weiteres Lernmaterial zur Veranschaulichung von Mengen, das häufig im Unterricht von Schüler*innen mit Trisomie 21 eingesetzt wird, ist *Numicon*. Das Lernmaterial besteht aus zehn Plastikschablonen, die mithilfe von Aussparungen die Zahlen 1 bis 10 darstellen (Abbildung 6.3).

Abbildung 6.3
Numicon-Schablonen



Die Anzahl kann anhand der Form und durch Nachzählen bestimmt werden. Darüber hinaus lässt sie sich anhand der Einfärbung erkennen, da jede Schablone eine eigene Farbe darstellt und Zahl und Farbe korrespondieren (Rinaldi, Smees, Alvarez & Simner, 2020, S. 3). Im Vergleich zu einem zweizeiligen Zehnerfeld erscheinen die Numicon-Schablonen in einem Winkel von 90° gedreht, weshalb auch von einer Zweierbündelung gesprochen werden kann. Die Probleme der Quasi-Simultanerfassung bleiben bei einer Simultandysgnosie allerdings bestehen: Eine Unterscheidung der Schablonen 6 und 8, 7 und 9 oder 8 und 10 lässt sich unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie mutmaßlich nur anhand der Farbe oder durch Nachzählen bestimmen. In einer Studie mit 3236 neurotypischen Schüler*innen im Alter von sechs bis zehn Jahren schnitten Untersuchungspersonen, die die Numicon-Farben verinnerlicht hatten, in einem Test zum Mengenverständnis besser ab als solche, die diese Farben nicht auswendig wussten. Die Effektstärke von Numicon auf den Ausgang dieses Tests wird als klein bis mäßig angegeben. Ein überdurchschnittliches Abschneiden in einem Mathematiktest ließ sich allerdings nicht nachweisen (ebd.).

Ein Lernansatz, der auf der Fünferbündelung basiert und die enaktive Ebene betont, ist *Yes we can*. Diese Materialsammlung wurde speziell für Schüler*innen mit Trisomie 21 entwickelt und nimmt das Rechnen mit den Fingern in den Fokus. Der kleine Finger der linken Hand symbolisiert dabei die 1, der Ringfinger die 2, der Mittelfinger die 3, der Zeigefinger die 4 und der Daumen die 5. An der rechten Hand wird im umgekehrten Sinne weitergezählt: der Daumen symbolisiert die 6, der Zeigefinger die 7 usw. Zur Darstellung der Zehner werden als konkretes Material anfangs Stäbchen und später die Fingerknöchel verwendet. Additionen erfolgen durch aufbauendes Zählen, Subtraktionen durch abbauendes

Zählen (Wieser & Hotter, 2011, S. 17). Die Entwickler*innen erhoffen sich, dass der Einsatz der Finger die Eigenwahrnehmung steigert, „welche eine entscheidende Voraussetzung für die Raumwahrnehmung und damit für die Erfassung des mathematischen Zahlenraums ist“ (ebd., S. 21). Weiterhin schreiben die Autorinnen: „Die Fingerbewegungen beim Zählen können jederzeit visuell kontrolliert werden und die Simultanerfassung einzelner Fingerbilder unterstützt die Mengenwahrnehmung“ (ebd.). Das Ziel sei, dass durch die „konkret ausgeführte Tätigkeit mit dem Fingermaterial allmählich ein Denken in Bildern auf[gebaut werde]“ (ebd., S. 23).

Auch dieser Lernansatz basiert auf der der Kraft der Fünf: Einzelne Finger stellen Einer dar, eine ganze Hand bildet einen Fünfer. Eine quasi-simultane Erfassung, die neurotypischen Personen dank der der Fünferbündelung möglich ist, ist Personen mit Trisomie 21 nicht im gleichen Maße möglich (vgl. Unterkapitel 3.3.3, S. 56). Dass Lernende die Lösung einer mit den Fingern berechneten Aufgabe sofort benennen können, ist mutmaßlich darauf zurückzuführen, dass jeder Finger einer Zahl zugeordnet ist und Finger mit Hilfe des Tastsinns differenziert und in Folge benannt werden können. Spürt die lernende Person nach dem Durchführen einer Rechnung mit Hilfe dieses Systems den rechten Ringfinger, weiß sie, dass das Ergebnis 9 lautet. Die Zahlen werden so zu Synonymen einzelner Finger.

Wird in dieser Art mit den Fingern gerechnet, sind die Lernenden dazu angehalten, mit zählbasierten Rechenstrategien zu arbeiten. Bei der Counting All Strategy erfolgt das Rechnen durch das Zählen der gesamten Zahlenreihe. Im Fall von 4 + 3 zählt die lernende Person „1, 2, 3, <u>4</u>, 5, 6, <u>7</u>“, um das Ergebnis 7 zu ermitteln. Auch die Counting Min Strategy, bei der für die gleiche Aufgabe lediglich „<u>4</u>, 5, 6, <u>7</u>“ gezählt wird, gilt als Zählstrategie, die Kindern möglich ist, aber bald durch weniger fehleranfällige Alternativen abgelöst werden sollte (Dehaene, 1992, S. 8). Das forcierte Fingerrechnen birgt demnach die Gefahr der Manifestierung des zählenden Rechnens.

Die hier dargestellten Methoden zur Fünferbündelung stellen zum Teil ästhetische Lerngegenstände dar, mit denen sich kindgerechte Aktivitäten durchführen lassen. Aufgrund der Nutzung der Fünferstruktur stellen sie dennoch keine befriedigende Alternative zum Zwanzigerfeld dar und sind für Lernende mit Simultandysgnosie nicht vollumfänglich zu empfehlen.

6.2.3 Superzeichen

In der sonderpädagogischen Mathematikdidaktik scheint der Einsatz von Superzeichen weit verbreitet zu sein. Insbesondere Würfelbilder können zur Veranschaulichung von Zahlen an Förderschulen oder im inklusiven Unterricht vermehrt gefunden werden. Dies ist nicht verwunderlich, da Würfelpunktbilder aufgrund ihrer Struktur leicht wiederzuerkennen und zu benennen (vgl. Unterkapitel 2.7.3) und darüber hinaus den meisten Schüler*innen aus dem Lebensalltag bekannt sind. Die aus Brettspielen bekannten Würfelpunktbilder weisen allerdings die Schwäche auf, dass sie lediglich die Zahlen 1 bis 6 darstellen. Zur Darstellung des Zahlenraums 10 fehlen die 0 sowie die Mengen 7 bis 10.

Im Fall der Kieler Zahlenbilder wurde dieses Problem gelöst, indem zu den bereits bestehenden Würfelpunktbildern Zahlenbilder von 7 bis 10 hinzugefügt wurden (Rosenkranz, 2001, S. 31) (Abbildung 6.4).

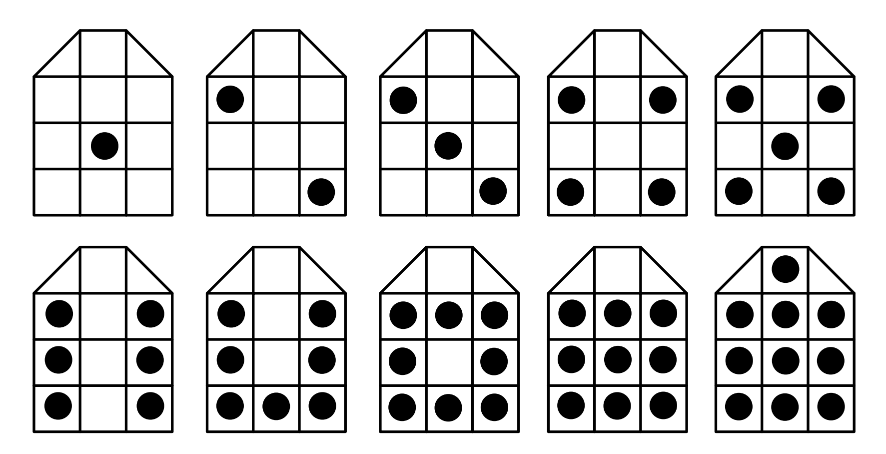


Abbildung 6.4 Die Kieler Zahlenbilder stellen die Würfelpunktbilder in einem stilisierten Haus dar und erweitern sie durch die Zahlenbilder 7, 8, 9 und 10 (Rosenkranz, 2001, S. 30)

Die Kieler Zahlenbilder wurden für Schülerinnen mit Dyskalkulie entwickelt (ebd., S. 8) und können auf einem Steckbrett aus Holz mit Hilfe von Klötzen, genannt *Steckern,* nachempfunden werden (ebd., S. 32). Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum 1 bis 20 sind möglich. Da die Zahlenbilder aber nicht konsequent aufeinander aufbauen, müssen sie regelmäßig umgesteckt werden, um das Endergebnis als Zahlenbild sichtbar zu machen (ebd., S. 61). Zur Darstellung

der Zahlen 11 bis 20 wird ein weiteres stilisiertes Haus neben dem vollen Zehner abgebildet (ebd., S. 77).

Ein ähnliches Prinzip wird mit dem *Würfelhaus-Konzept* verfolgt. In der Mengendarstellung, die u. a. in Arbeitsheften und einer App Verwendung findet, werden zwei Würfelpunktbilder übereinander dargestellt. Dabei wird auf die klassische Darstellung der Zahl 6 verzichtet. Diese setzt sich aus dem Würfelpunktbild der 5 und der 1 zusammen (Abbildung 6.5).

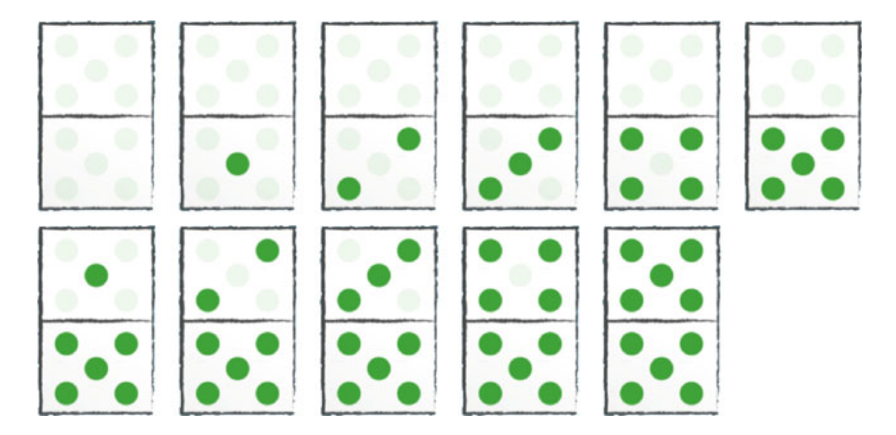


Abbildung 6.5 Mengenbilder des Lehrwerks Würfelhäuser entnommen aus der App Würfelhaus – Rechnen lernen (Strauß-Ehret, 2017)

Würfelpunktbilder, die Kieler Zahlenbilder und die Würfelhäuser haben gemein, dass sie das gleiche konzeptionelle Problem aufweisen. Sie entsprechen nicht dem Kriterium der aufbauenden Struktur; ein Mengenbild ist nicht ohne Weiteres im nachfolgenden zu erkennen. Bei Additionen müssen die Mengenbilder demnach regelmäßig umarrangiert werden, eine Besonderheit, die auf der konkreten Ebene mit genügend Übung zu bewältigen ist, aber auf der gedanklichen Ebene – insbesondere unter der Bedingung einer Simultandysgnosie – mutmaßlich schwerfällt.

6.2.4 Resümee und Ausblick

Über die hier vorgestellten Lösungen hinaus existieren noch viele weitere Lernmaterialien, die Schüler*innen ein Mengenverständnis und einen Eindruck von

Zahlzerlegungen, Additionen und Subtraktionen verschaffen sollen. Nicht jede dieser Lösungen hat die mentale Operation zum Ziel. Zur Veranschaulichung von Zahlzerlegungen können beispielsweise Holzzahlen verwendet werden, die sich in der Größe unterscheiden und ähnlich wie die Cuisenaire-Stäbe in Kombination die Höhe der Summe ergeben (Abbildung 6.6).



Abbildung 6.6 Zahlenbausteine, die sich in der Höhe unterscheiden. Die Kombination der Zahlen 1 und 9 entspricht in der Höhe der Kombination der Zahlen 4 und 6. In diesem Beispiel handelt es sich um die Rechenbausteine aus Holz von Eichhorn

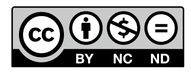
Der Mangel an einem Lernmaterial für Lernende mit Simultandysgnosie als Alternative zum Zwanzigerfeld mit Fünferbündelung ist dennoch vorhanden. Die hier vorgestellten Lösungen, die teilweise andere Ziele als die mentale Operation verfolgen oder eine andere Zielgruppe ansprechen sollen, schließen diese Lücke im Lehrmittelangebot nicht.

6.3 Fragestellung

Die vorangegangene Auseinandersetzung mit den Kriterien für die Gestaltung von Lernmaterialien und den bereits verfügbaren Alternativen zur klassischen Darstellungsweise der Kraft der Fünf offenbart, dass die wissenschaftlich gestützte Entwicklung eines neuen Lernmaterials eine dezidierte Fragestellung erfordert, die das Anwendungsgebiet, wissenschaftliche Vorerkenntnisse und die Möglichkeit einer wissenschaftlichen Prüfung berücksichtigt.

Die Fragestellung lautet:
Ist es möglich, ein Unterrichtsmaterial mit Hilfe von Educational Design Research zu entwickeln, das

a) *Kriterien zur allgemeinen Gestaltung von Unterrichtsmaterialien nach Montessori, zu Anschauungsmaterialien nach Klafki und Galperin sowie zur Mengendarstellung nach Kühnel erfüllt,*
b) *Darstellungen von Mengen und Rechenoperationen beinhaltet, die Menschen mit Simultandysgnosie erfolgreich anwenden, und*
c) *empirische Hinweise zulässt, dass Menschen mit Simultandysgnosie tatsächlich mentale Bilder e*ntwickeln?





7 Entwicklungsphase

Die Entwicklung des Lernmaterials, das die aufgezeigte Lücke im Materialangebot schließen sollte, brachte vier Iterationen hervor. Parallel zur Entwicklung des Materials wurden drei hilfreiche Materialisierungen entwickelt. Die Entwicklung der neuen Lernmittel fußte auf den theoretischen Annahmen, die in den vorherigen Kapiteln herausgearbeitet wurden. Sie wurden außerdem durch Rückgriff auf unterschiedliche Methoden von einer variierenden Zahl an Untersuchungspersonen erprobt. Die Entwicklung der Iterationen 1, 2 und 4 wurde durch Erprobung und Beobachtung begleitet. In der dritten Iteration wurden die Beobachtungen mit Hilfe von Kompetenzrastern formativ evaluiert. Jede Iteration des Lernmaterials wurde dahingehend überprüft, ob die zuvor aufgestellten Kriterien erreicht worden sind. Die folgende Grafik verdeutlicht den zirkulären Entwicklungsprozess und die Anzahl der Untersuchungsteilnehmenden je Iteration (Abbildung 7.1).

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_7.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_7

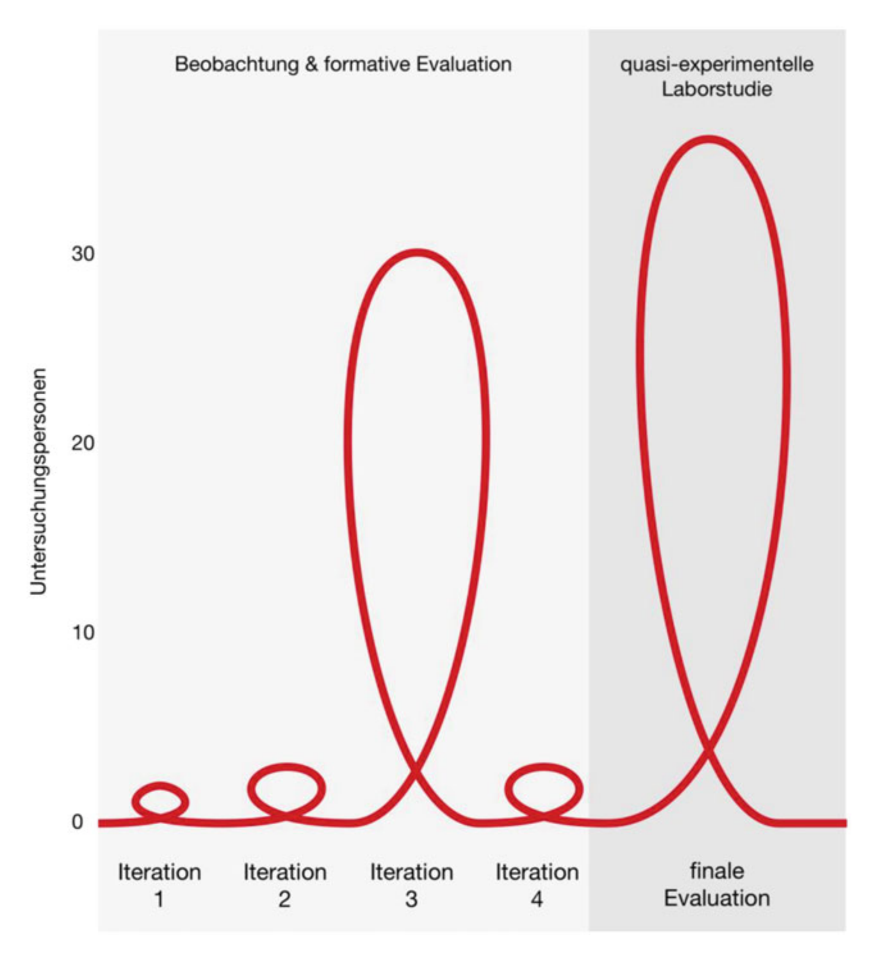


Abbildung 7.1 Visualisierung des Entwicklungsprozesses des Lernmaterials (in Anlehnung an McKenney, 2001, S. 55)

Die Entwicklung der ersten Iteration wurde von zwei Untersuchungspersonen unterstützt, die zweite von drei Personen, die dritte von 30, die vierte wiederum von drei. Zuletzt erfolgte eine finale Evaluation, an der 36 Personen teilnahmen.

7.1 Iteration 1: Zweierbündelungen im Zehnerfeld aus Holz

Die erste Iteration des Lernmaterials, das die Erzeugung mentaler flexibler Mengenbilder bei Simultandysgnosie ermöglichen sollte, war maßgeblich von den Erkenntnissen der vorbereitenden Forschungsphase bestimmt. Durch die Rückmeldungen eines zehnjährigen Jungen und einer 19-jährigen Frau mit Trisomie 21 konnten Konzepte geprüft und optimiert werden. Diese erste Version des Lernmaterials wurde von Januar 2015 bis Oktober 2015 entwickelt.

Der erste Teil der Entwicklungsphase war von dem Ziel geprägt, ein neues System zur Darstellung von Mengen und einen ersten Prototyp des Lernmaterials zu entwickeln. Dabei sollte eine Orientierung an den zuvor aufgestellten Kriterien erfolgen, damit das Lernmaterial den Anforderungen der Barrierefreiheit für Lernende mit Simultandysgnosie und der sinnvollen Einsetzbarkeit im Unterricht entspricht.

7.1.1 Untersuchungspersonen und Methodik

Zur Zeit der Entwicklung des neuen Lernmaterials förderte der Autor dieser Arbeit am *Zentrum für Aufmerksamkeitsbesonderheiten*, einer Beratungsstelle an der Universität Hamburg, wöchentlich einen Jungen mit Trisomie 21 in Mathematik. Leen war zu Beginn des ersten Teils der Entwicklungsphase 10;5 Jahre alt, arbeitete gerne mit Zahlen und wies einen entwickelten Zahlbegriff nach Piaget auf (vgl. Unterkapitel 2.2.2.2). Er kam sehr gerne an die Universität und war es gewohnt, für ihn neues Lernmaterial zu erproben und seine Meinung dazu kundzutun. An der Entwicklung des neuen Systems zur Mengendarstellung war Leen beteiligt, indem ihm erfolgsversprechende Entwürfe gezeigt wurden und sein Umgang mit diesen beobachtet wurde. Nach dem Prinzip *Trial-and-Error* wurden anhand des erarbeiteten fachlichen Hintergrunds der vorbereitenden Forschungsphase Mengenbilder entworfen und in Folge von Leens Reaktion angepasst.

Zur Prüfung der vorgenommenen Entscheidung wurden die Mengenbilder und der Prototyp des Lernmaterials von Teresa Knopp erprobt und eingeschätzt, die zu diesem Zeitpunkt ein Praktikum an der Beratungsstelle absolvierte. Frau Knopp lebt unter den Bedingungen einer Trisomie 21 und war zur Zeit des Praktikums 19;9 Jahre alt. Sie wies eine vollständige Zahlbegriffsentwicklung auf und konnte bereits Kopfrechenaufgaben mit sechsstelligen Zahlen lösen. Die Zusammenarbeit

mit Leen und Frau Knopp wurde auf Video festgehalten, um wahrgenommene Beobachtungen im Nachgang verifizieren zu können.

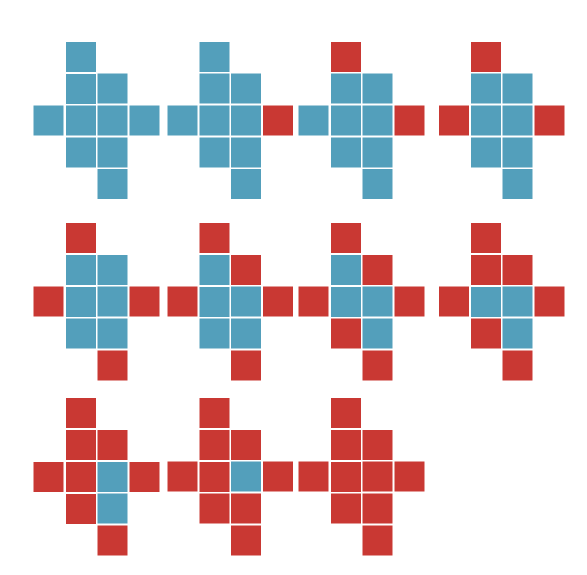
7.1.2 Entwicklung einer neuen Darstellungsform von Mengen

Die Konzeption des neuen Systems zur Darstellung von Mengen fand unter Berücksichtigung der Erkenntnisse der vorbereitenden Forschungsphase statt. Der erste Entwurf, der als geeignet in Betracht gezogen wurde, wurde von Leen und später von Frau Knopp erprobt.

7.1.2.1 Verworfene Konzepte

Auf der Suche nach Mengendarstellungen, die auch mit wenigen Chunks verarbeitet werden können, wurden diverse Darstellungsformen entworfen, die aufeinander aufbauend Superzeichen für die Mengen 0 bis 10 darstellten. Beispielhaft wird im Folgenden ein System präsentiert, das zur Bildung von Mengenbildern anstelle von runden Wendeplättchen Wendequadrate nutzt. Die blauen Quadrate kennzeichnen den Wert 0 und geben die Struktur vor. Wird ein Quadrat gewendet und in Rot angezeigt, stellt dieses eine 1 dar (Abbildung 7.2).

Abbildung 7.2 Die Mengenbilder 0 bis 10 im Pixel-System



Die einzelnen Mengendarstellungen in diesem System wirkten unübersichtlich. Sie sollten als Superzeichen eigentlich leicht identifizierbar sein, lassen sich allerdings nur schwer interpretieren. Daher wurde dieses Konzept verworfen.

Neben der Entwicklung eines neuen Systems zur Darstellung von Mengen wurde eine Modifikation der Kieler Zahlenbilder in Betracht gezogen. Das Setzbrett der Kieler Zahlenbilder ist erfahrungsgemäß an vielen Hamburger Förderschulen und inklusiv unterrichtenden Regelschulen im Materialfundus vorhanden und hätte bei Wiederverwendung die Beschaffung neuer Materialien vermieden. In der vorbereitenden Forschungsphase wurde ein zentraler Kritikpunkt an den Kieler Zahlenbildern herausgearbeitet: Sie übernehmen die Würfelpunktbilder 1 bis 5, die nicht aufeinander aufbauen. Erst die Zahlenbilder 6 bis 10 bauen aufeinander auf. Das heißt, das Zahlenbild der 6 ist in der 7 zu finden, das der 7 in der 8 usw. (siehe Unterkapitel 6.2.3). Mit dem Ziel, dieses Problem zu lösen, wurde folgende Modifikation der Kieler Zahlenbilder vorgenommen (Abbildung 7.3).

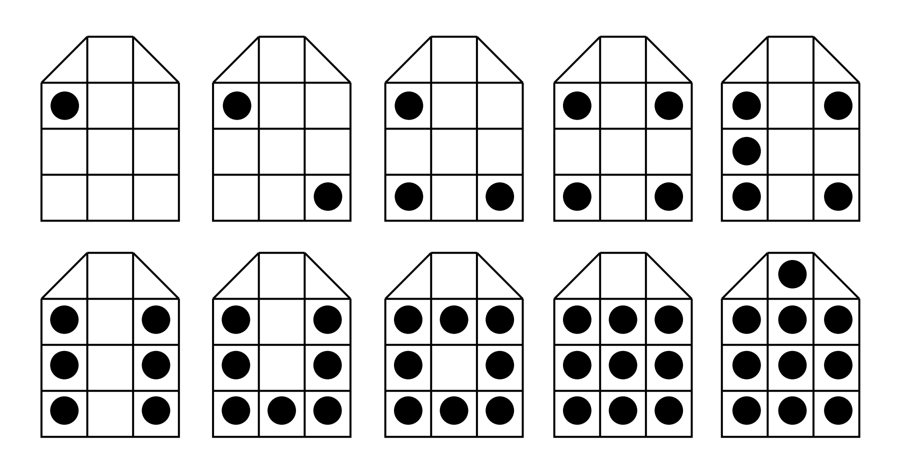


Abbildung 7.3 Modifikation der Kieler Zahlenbilder 1 bis 10. Die Zahlenbilder 1, 3 und 5 wurden verändert, damit alle Zahlenbilder aufeinander aufbauen (Original: Rosenkranz, 2001, S. 30)

Eine Änderung der Zahlenbilder 1, 3 und 5 bewirkt, dass nun die jeweils kleineren Zahlenbilder in den größeren zu finden sind – eine Maßnahme, die sich in Zahlzerlegungen und Additionsaufgaben positiv bemerkbar machen sollte. Dadurch, dass der erste Summand einer Addition deutlich im Zahlenbild der Summe zu finden ist, sollte die Addition übersichtlich veranschaulicht sein und

die Möglichkeit der mentalen Nachbildung bieten. Diese Hoffnung hat sich gleichwohl nicht bestätigt, wie die folgende Darstellung der Verdopplungsaufgabe 3 + 3 beispielhaft zeigt (Abbildung 7.4).

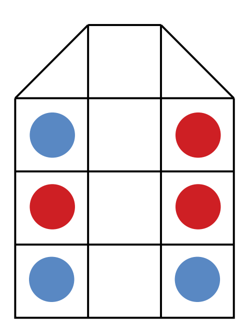


Abbildung 7.4 Darstellung der Aufgabe 3 + 3 im Kieler Zahlenhaus unter Verwendung der modifizierten Zahlenbilder. Der erste Summand ist mit blauen Plättchen dargestellt, der zweite mit roten. Das Gesamtergebnis ist im gesamten Mengenbild ersichtlich

Zwar ist die Summe 6 bereits auf einen Blick zu erkennen, aber die gedankliche Nachbildung dieser Abbildung fällt schwer, wie bereits der Selbstversuch unter neurotypischen Bedingungen erkennen lässt. Die Tatsache, dass ein kleineres Mengenbild im größeren zu finden ist, gewährleistet keine übersichtliche Darstellung von Zahlzerlegungen. Im Fall der modifizierten Kieler Zahlenbilder ist die Verteilung der einzelnen Punkte und damit der Weg, um Mengenbilder aufzubauen, unübersichtlich und schwer einprägsam. Um von einem modifizierten Zahlenbild zum nächsten zu gelangen, müsste ein kompliziertes Muster verfolgt werden (Abbildung 7.5).

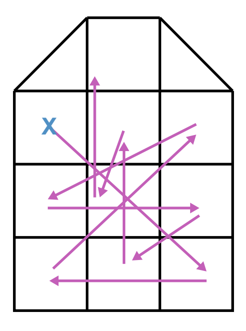


Abbildung 7.5 Weg, den sich Lernende beim Setzen der modifizierten Kieler Zahlenbilder hätten merken müssen (Startpunkt blaues X)

Es bestanden begründete Zweifel, ob der Zeitaufwand der Aneignung des Aufbaus der modifizierten Kieler Zahlenbilder dem Lernertrag gerecht würde. Da die Modifikation der Kieler Zahlenbilder nicht zur erwünschten Verbesserung

führte, sondern vielmehr eine Verkomplizierung darstellte, wurde dieser Ansatz verworfen.

7.1.2.2 Entwicklung des mathildr-Systems

Im Folgenden wird die Entwicklung eines neuen Systems zur Darstellung von Mengen beschrieben, das später den Namen *mathildr-System* erhielt.

7.1.2.2.1 Entwurf 1: Kombination aus Zweierbündelung und Superzeichen

Die beiden bisherigen Entwürfe zu Mengendarstellungen basierten auf dem Grundgedanken, aus verteilten Einzelelementen ein Superzeichen zu bilden. In Anschauungsmaterialien, die auf der Kraft der Fünf basieren, entstehen die Superzeichen *Fünfer* und *Zehner* allerdings durch die Bündelung von Mengen (vgl. Unterkapitel 3.3.3). In Anlehnung hieran wurde nach einer Darstellungsweise gesucht, die eine Kombination aus Bündelungen und Superzeichen darstellt und dadurch eine quasi-simultane Erfassbarkeit unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie gewährleistet.

Erfahrungen aus den Durchführungen der Voruntersuchungen zur Zahlbegriffsentwicklung im Rahmen der Trisomie-21-Studie (vgl. Unterkapitel 2.2.2.2) legen nahe, dass Personen mit Trisomie 21 von Zweierbündelungen profitieren. Beim Nachzählen von bis zu acht Punkten von einer Karte zählten Untersuchungspersonen mit Trisomie 21, die bereits mit Zahlen vertraut waren, gelegentlich in einem Rhythmus, der die geraden Zahlen betonte: „1, <u>2</u>, 3, <u>4</u>, 5, <u>6</u>, 7, <u>8</u>“. Einige zählten die Menge ungeordneter Punkte direkt paarweise nach: „2, 4, 6, 8“. Diese Beobachtung ist unter Berücksichtigung des Aufmerksamkeitsumfangs von zwei bis drei Chunks nicht verwunderlich.

Auch Leen strukturierte Mengen nach Möglichkeit in Paaren. Da neurotypische Personen mit einem Aufmerksamkeitsumfang von vier Chunks in der Lage sind, mit einer Fünferbündelung zu arbeiten, ging der Student Jonas Müller in seiner Masterarbeit (2015) der Frage nach, ob eine Dreierbündelung unter den Bedingungen einer Trisomie 21 ebenfalls hilfreich sein kann. Dazu bot er Leen zur Veranschaulichung von Mengen, die einen persönlichen Sinn für ihn beinhalteten, eine Zweier- und eine Dreierbündelung an. Bei einem Tischfußballspiel wurde für jedes erzielte Tor ein kleiner Fußball aus Ton in eine Ablage mit Einbuchtungen gelegt. Eine Ablage gruppierte die Einbuchtungen zu Paaren, die andere bündelte jeweils drei Einbuchtungen. Leen profitierte von beiden Bündelungsformen. Die Ermittlung des Punktestandes gelang ihm mithilfe der Ablage mit Paarbildung allerdings deutlich schneller, mutmaßlich weil sie eine

Orientierung an der 10 ermöglicht (Müller, 2015, S. 53). Die Zahl 10 im Dezimalsystem bietet nur zwei Bündelungsformen an, bei denen jede Bündelung den gleichen Wert besitzt: die Zweierbündelung und die Fünferbündelung. Dass Personen mit Simultandysgnosie bevorzugt auf Zweierbündel zurückgreifen, ist nachvollziehbar, da sich ein Bündel aus zwei Elementen auch mit einem Aufmerksamkeitsumfang von zwei bis drei Chunks gut überblicken lässt. Werden Zweierbündel allerdings verwendet, um die Menge 10 darzustellen, besteht das Problem, dass fünf Elemente überblickt werden sollen (Abbildung 7.6).



Abbildung 7.6 Fünf Zweierbündel bilden die Menge 10

Zwar können die Zweierbündel unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie jeweils simultan erfasst werden, die Übersicht über alle fünf Bündel übersteigt allerdings den Aufmerksamkeitsumfang. Die Mengen müssen nachgezählt werden.

Zur Vermeidung des Zählens und zur Entlastung des Aufmerksamkeitsumfangs eignen sich Superzeichen: Aus den Untersuchungsergebnissen der Trisomie-21-Studie ist bekannt, dass Personen mit Simultandysgnosie die Würfelpunktbilder 1 bis 6 quasi-simultan erfassen können (vgl. Unterkapitel 2.7.2). Aus diesem Grund wurden die übersichtliche Bündelung und Superzeichen kombiniert. Anstatt der Musterbildung durch Platzieren eines einzelnen Punktes könnten jeweils zwei Punkte verwendet werden. Nach diesen Überlegungen entstanden die folgenden Mengenbilder (Abbildung 7.7).

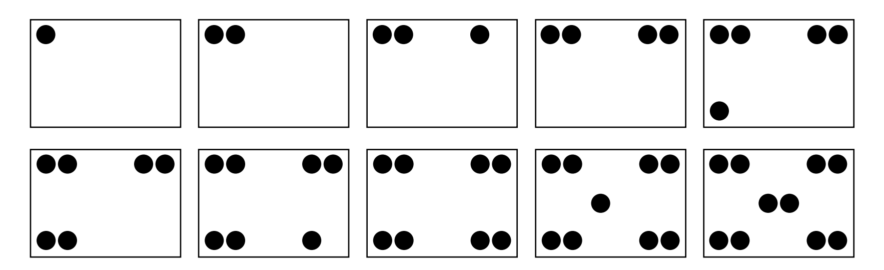


Abbildung 7.7 Erster Entwurf der Mengenbilder, die später als mathildr bezeichnet wurden

Diese Mengenbilder bauen aufeinander auf und verwenden eine Zweierbündelung. Das Mengenbild der 10 entstand aus dem Würfelpunktbild der 5. Anstelle jedes Würfelauges wurden zwei Punkte gesetzt. Dies gilt auch für das Mengenbild der 8, das sich am Würfelpunktbild der 4 orientiert. Um diese Ähnlichkeit zu ermöglichen, wurde ein Zeilensprung zwischen dem Mengenbild der 4 und der 5 vorgenommen. Die mittlere Zeile findet erst mit der Menge 9 Verwendung. Diese kontraintuitive Besonderheit wurde in Kauf genommen, um die neu entstandenen Superzeichen möglichst unterscheidbar zu gestalten. Analog zur Gestaltung der Kieler Zahlenbilder können mithilfe dieser Mengenbilder ebenfalls die Mengen 11 bis 20 dargestellt werden. Hierzu werden zwei Mengenbilder nebeneinander abgebildet, z. B. das der 10 und das der 5, um die 15 darzustellen (Abbildung 7.8).

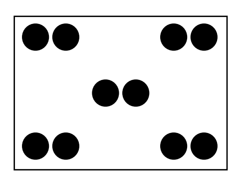
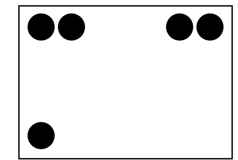



Abbildung 7.8
Darstellung der Menge 15 im ersten Entwurf der Mengendarstellung

Additionen bzw. Zahlzerlegungen lassen sich in diesem System übersichtlicher darstellen als mit den modifizierten Kieler Zahlenbildern. Im folgenden Beispiel wird erneut die Aufgabe 3 + 3 mithilfe von Wendeplättchen dargestellt (Abbildung 7.9).

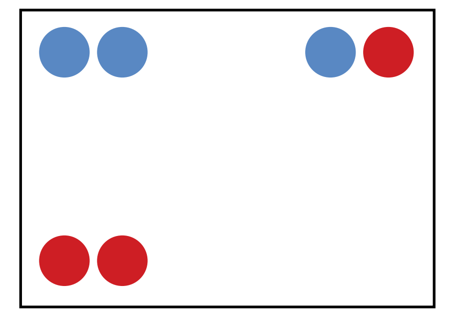


Abbildung 7.9
Darstellung der Aufgabe 3 + 3 im ersten Entwurf der Mengendarstellung. Der erste Summand ist mit blauen Plättchen dargestellt, der zweite mit roten. Das Gesamtergebnis ist im gesamten Mengenbild ersichtlich

Dank der Positionierung der Zweierbündel in Zeilen fällt diese Darstellung übersichtlicher aus als die Darstellung der gleichen Additionsaufgabe im Kieler

Zahlenhaus (vgl. Abbildung 7.4). Der erste Summand, hier mit blauen Wendeplättchen dargestellt, entspricht dem Mengenbild der 3. Die Summe ist in der Kombination der blauen und roten Wendeplättchen zu erkennen. Sie entspricht dem Mengenbild der 6.

Additionsaufgaben mit zwei Summanden, deren Summe sich über die Menge 8 und 9 erstreckt, also den Übergang von der unteren zur mittleren Zeile beinhalten, bleiben trotz des Zeilensprungs übersichtlich. Je nach Größe des zweiten Summanden konzentriert sich dessen Darstellung durch rote Wendeplättchen um den mittleren oder unteren rechten Bereich. Dies verdeutlicht das folgende Beispiel, in dem die Addition 6 + 3 dargestellt wird (Abbildung 7.10).

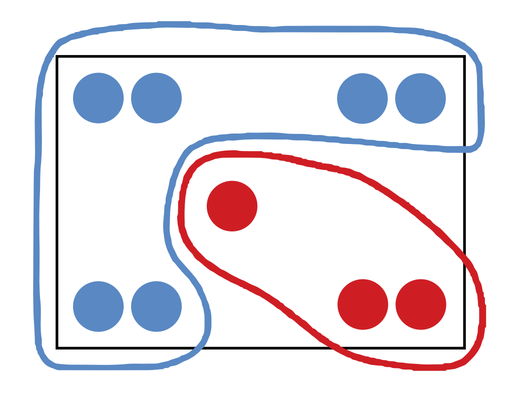


Abbildung 7.10 Darstellung der Aufgabe 6 + 3 im ersten Entwurf der Mengendarstellung. Der erste Summand verteilt sich von oben links über das Mengenbild, der zweite orientiert sich im unteren rechten Bereich

In diesem Fall lassen sich – im Gegensatz zur Darstellung in den modifizierten Kieler Zahlenbildern (vgl. Abbildung 7.4) – eindeutige Bereiche abgrenzen, die den beiden Summanden zugeordnet werden können. Die Zahlzerlegung wird dadurch übersichtlicher dargestellt. Auch Subtraktionsaufgaben lassen sich in diesem System darstellen, wie das Beispiel in Abbildung 7.11 zeigt.

Erprobung des ersten Entwurfs

Zur Erprobung dieses ersten Entwurfs der Mengenbilder wurden diese mehrfach auf Karten ausgedruckt und Leen präsentiert. Dieser zählte die Punkte auf den Karten und legte sie der Reihenfolge nach ab. Karten, die ein Mengenbild zeigten, das er schon abgelegt hatte, legte er auf die bereits abgelegte Karte. Dabei wurden drei zentrale Beobachtungen gesammelt:

1. Es fiel Leen schwer, die Mengen 5 und 6 sowie die Mengen 7 und 8 voneinander zu unterscheiden. Beim sorgfältigen Nachzählen unterlief ihm dieser

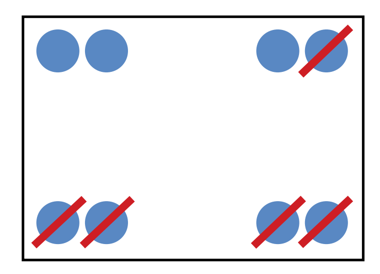


Abbildung 7.11 Darstellung der Aufgabe 8 – 5 im ersten Entwurf der Mengendarstellung. Da die einzelnen Punkte des Mengenbildes nicht willkürlich, sondern beginnend mit dem Punkt mit der höchsten Ordnungszahl durchgestrichen wurden, wird die Differenz 3 in der Form des Mengenbildes 3 dargestellt

Fehler nicht. Verzichtete er aber auf das Zählen, kam es regelmäßig zu Verwechslungen.
2. In den Darstellungen wird nicht deutlich, wie viele Punkte ergänzt werden müssen, um die Menge 10 zu erhalten. Da die Mengenbilder lediglich aus Punkten bestehen, die jeweils für eine Einheit stehen, ist die Darstellung der 0 nicht möglich.
3. Beim Nachzählen der Mengenbilder 9 und 10 zählte Leen im Sinne der Leserichtung nach dem Kreis mit der Ordnungszahl 4 den mit der Ordnungszahl 9.

Diese Beobachtungen sollten bei der Entwicklung eines zweiten Entwurfs berücksichtigt werden.

7.1.2.2.2 Entwurf 2: Kirschen anstelle von Wendeplättchen

Die erste Beobachtung wirft das Problem auf, dass einige Mengenbilder des ersten Entwurfs offenbar unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie nicht auf einen Blick erfasst werden können. Als Lösung dieses Problems wurde ein senkrechter Strich oberhalb des Kreises, der ein Wendeplättchen symbolisierte, angefügt. Werden zwei solcher Elemente miteinander gebündelt, neigen sich diese Striche zueinander und bilden ein Dach (Abbildung 7.12).

Auf diese Weise lassen sich Einzelelemente und Bündel besser voneinander unterscheiden.

Diese Darstellung erinnert an die Darstellung von Kirschen, die ebenfalls einzeln und in Paaren gebündelt auftreten. Um die Ästhetik und den Aufforderungscharakter des Lernmaterialies zu verbessern, wurde dieses Bild bewusst

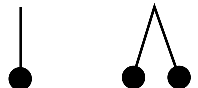


Abbildung 7.12 Die Kreise wurden durch Striche erweitert, die bei einzelnen Elementen senkrecht dargestellt werden und bei einer Zweierbündelung ein Dach bilden

aufgenommen: Die Punkte (bzw. stilisierten Wendeplättchen) wurden zu stilisierten Kirschen mit rotem Fruchtkörper und grünem Stängel.

Die zweite Beobachtung zeigt, dass die Struktur des Zehnerfeldes in den Mengenbildern nicht deutlich genug dargestellt ist. Der neue Entwurf der Mengenbilder beinhaltet deshalb grundsätzlich auch die freien Plätze des Zehnerfeldes. Auf diese Weise lässt sich ein Mengenbild der 0 darstellen und jedes einzelne Mengenbild von 0 bis 9 daraufhin untersuchen, wie viele Kirschen hinzugefügt werden müssten, um die 10 zu erreichen. In Abbildung 7.13 sind die elf neugestalteten Mengenbilder zu sehen.

Die dritte Beobachtung, dass Leen bevorzugt die Kirschen in der zweiten Reihe zählte, bevor er solche in der dritten Reihe zählte, wurde zum Anlass genommen, den Zeilensprung im Aufbau der Mengenbilder in Frage zu stellen. Infolgedessen entstanden alternative Mengenbilder der Anzahlen 5 bis 9 (Abbildung 7.14).

Erprobung des zweiten Entwurfs

Teresa Knopp begann ihr Praktikum zum Zeitpunkt der Fertigstellung des zweiten Entwurfs und der alternativen Mengenbilder. In einem Versuch wurden vor ihr Karten mit den ihr noch unbekannten Mengenbildern des zweiten Entwurfs auf dem Tisch aufgedeckt. Ihre Aufgabe bestand darin, die Anzahl der Kirschen schnellstmöglich zu benennen. Nachdem ihr für einen kurzen Moment das Mengenbild der 9 gezeigt wurde, benannte sie dieses sofort korrekt. Auf die Frage, woran sie die Anzahl erkannt habe, äußerte sie: „Das sind vier Gruppen im Quadrat und einer in der Mitte“. Als der Versuch am nächsten Tag wiederholt wurde, beantwortete sie die gleiche Frage folgendermaßen: „Weil einer fehlt bis 10“. Ihr Wissen um die Struktur der Mengenbilder ermöglichte ihr die Anzahlbestimmung, ohne die einzelnen Kirschen zu zählen oder die Zahlzerlegung aus Bündeln und einzelnen Kirschen zu berechnen.

Dass das Zehnerfeld der Mengenbilder entgegen der Leserichtung von oben links nach unten rechts die mittlere Zeile vorerst überspringt, bezeichnete Frau Knopp als „komisch“. Die alternativen Mengenbilder bewertete sie als „auch

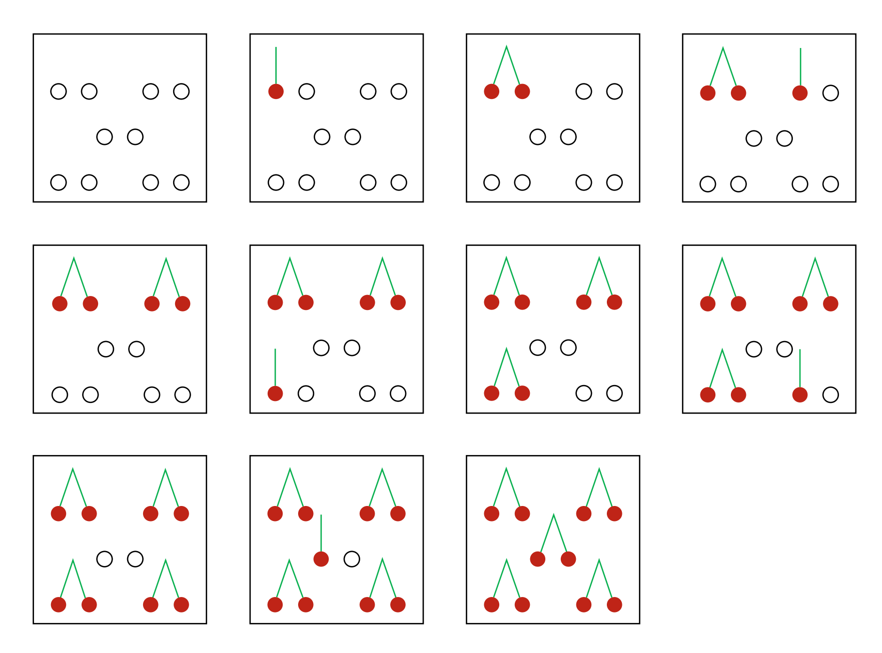


Abbildung 7.13 Zweiter Entwurf der Mengenbilder, der die Kreise durch Striche erweitert, die die Bündelung unterstreichen und farblich an Kirschen erinnern

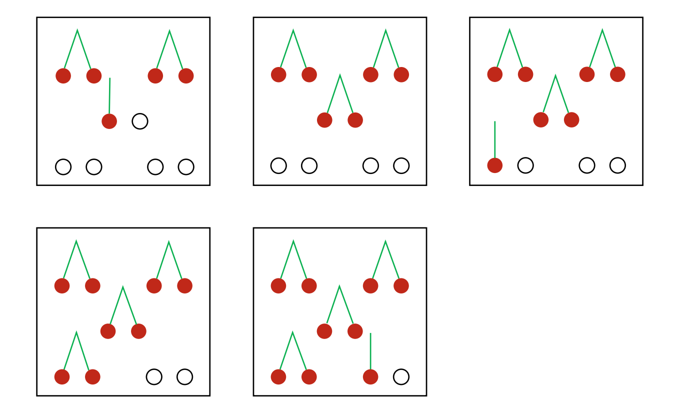


Abbildung 7.14 Alternative Mengenbilder des zweiten Entwurfs

ok“, gab aber an, dass ihr der ursprüngliche Aufbau besser gefalle, da die 8 dem Würfelpunktbild der 4 ähneln würde und sie deshalb die Anzahlen schneller bestimmen könnte.

Frau Knopp verglich außerdem die ersten beiden Entwürfe miteinander. Mit der Begründung, dass die Elemente im zweiten Entwurf (mit Kirschstängeln) nicht gezählt werden müssten und dass die Kirschen besser aussähen als die Punkte, sprach sie sich für den zweiten Entwurf aus.

Dieser wurde ebenfalls durch Leen begutachtet. Eine Verwechslung von aufeinanderfolgenden Mengen kam nun nicht mehr vor, die Kirschstängel erfüllten ihren Zweck. Die hinzugefügten Platzhalter für Kirschen ermöglichten ein Gespräch darüber, wie viele Kirschen bis zur 10 fehlen. Das Mengenbild der 0 interpretierte Leen auf Anhieb korrekt.

Während sich Leen mit den alternativen Mengenbildern 5 bis 9 beschäftigte, entstand der Eindruck, er käme besser mit den ursprünglichen Mengenbildern zurecht, da ihm beim Benennen der neuen Bilder ohne Nachzählen häufig Fehler unterliefen. Diese Beobachtung könnte auch darauf zurückzuführen sein, dass er sich die ursprüngliche Anordnung der Mengenbilder bereits eingeprägt hatte. Die Tatsache, dass nun zwei mögliche Konstellationen für Mengenbilder angeboten wurden, verwirrte ihn offenkundig. Bei dieser Form der Mengendarstellung scheint es von Bedeutung zu sein, dass ein spezifisches Mengenbild repräsentativ für eine Anzahl steht. Zugunsten der Anlehnung des Mengenbilds der 8 an das Würfelpunktbild der 4 und auf Anraten von Frau Knopp wurden die alternativen Mengenbilder verworfen.

7.1.2.3 Entwicklung des ersten Prototyps des Lernmaterials

Um die Mengenbilder handelnd nachvollziehen und sich u. a. erschließen zu können, dass ein Kirschpaar in den Mengenbildern immer aus zwei Kirschen besteht, wurde der Prototyp eines konkreten Lernmaterials entwickelt.

Als Basis wurde ein Zehnerfeld hergestellt, das aus zwei aufeinander geleimten Spanplatten in der Größe von 24×30 cm besteht. In die obere Spanplatte wurden vor dem Verleimen Löcher mit einem Durchmesser von ca. 1,8 cm gefräst, die die Struktur des Mengenbildes der 0 vorgeben (Abbildung 7.15).

Die stilisierten Kirschen dieses ersten Prototyps bestehen jeweils aus einer rot lackierten Holzperle, die mit einem grün lackierten Rundstab, ebenfalls aus Holz, verleimt ist (Gesamtlänge: 7,5 cm). Am Ende des Rundstabs wurde mit Hilfe von grünem Klebeband eine Magnetkugel angebracht, damit zwei Kirschen miteinander gebündelt werden können (Abbildung 7.16).



Abbildung 7.15 Leeres Zehnerfeld des ersten Prototyps des neuen Lernmaterials

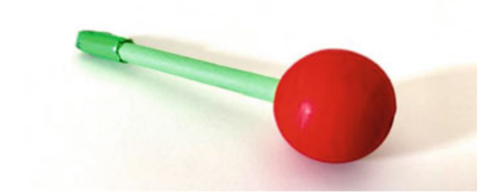


Abbildung 7.16 Holzkirsche mit Magnet am Ende des Stängels

Es wurden zehn Holzkirschen hergestellt, um die Mengen 0 bis 10 darstellen zu können. Hierzu werden die Holzkirschen auf das Brett in die Löcher gelegt. In Abbildung 7.17 wird auf diese Weise das Mengenbild der 7 angezeigt.

7.1.2.4 Erprobung und Begutachtung des ersten Prototyps

Leen zeigte Freude bei der Arbeit mit dem Material. Die zuvor nur von Karten bekannten Mengenbilder legte er nun mit Holzkirschen nach (Abbildung 7.18).

Der Autor entwickelte gemeinsam mit Leen verschiedene spielerische Ansätze, die ihn darin unterstützen sollten, sich die Mengenbilder einzuprägen und sie ad hoc zu benennen. In einem dieser Spiele wurde abwechselnd das Zehnerfeld mit einem Zeichenblock überdeckt und ein Mengenbild mithilfe der Holzkirschen gelegt. Für einen kurzen Moment wurde der Zeichenblock angehoben. Die Aufgabe der Person gegenüber bestand darin, die angezeigte Menge an Kirschen so schnell wie möglich zu benennen (Abbildung 7.19).

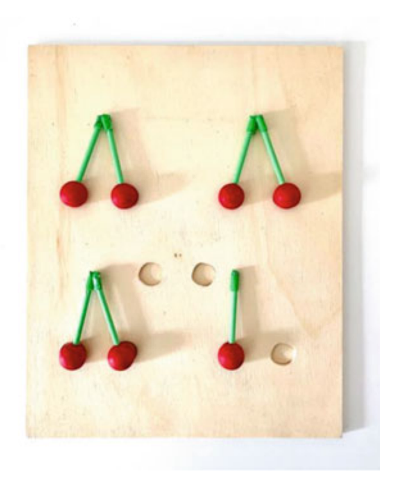


Abbildung 7.17 Das Mengenbild der 7 im ersten Prototyp des neuen Lernmaterials

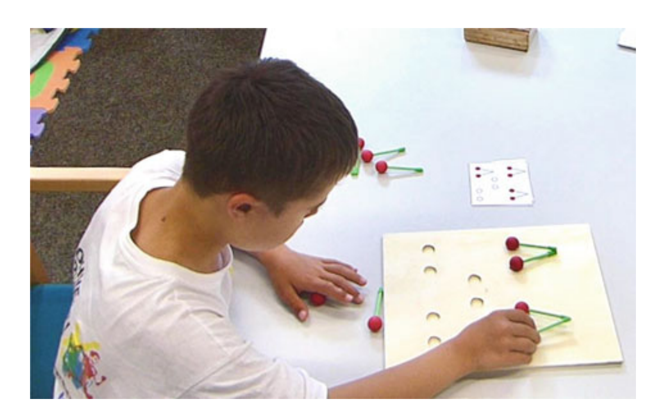


Abbildung 7.18 Leen legt das Mengenbild der 6 mit Hilfe des Prototyps nach



Abbildung 7.19 Spiel zum Einprägen der Mengenbilder durch Kurzzeitdarbietung des Zehnerfeldes

Auf spielerische Weise lernte Leen die Mengenbilder binnen weniger Sitzungen. Um zu verstehen, wie er sich die Mengenbilder erschloss, wurde ihm regelmäßig die Frage gestellt, woran er bestimmte Mengenbilder habe erkennen können. Im Fall der Mengenbilder bis 7 beantwortete er die Frage, indem er auf die Kirschen deutete und die Anzahl wiederholte. Auf die Frage „Woher wusstest du, dass das vier Kirschen sind?“ zeigte er beispielsweise auf die Kirschen und sagte: „Das sind vier!“. Bei den Mengen 8 und 9 deutete er hingegen gelegentlich auf die nicht besetzten Plätze. Beispielsweise beantwortete er die Frage, woran er die 9 erkannt habe, indem er auf das zehnte freie Feld zeigte und sagte: „Hier ist 10!“.

Mutmaßlich erkannte Leen auch anhand der freigebliebenen Plätze das dargestellte Mengenbild, indem er auf die Anzahl der Kirschen schloss. Diese Strategie erinnert eher an einen Mess- als an einen Zählvorgang. Tatsächlich kann das Zehnerfeld als ein Hohlmaß verstanden werden, das sich füllen lässt. Jeder einzelne freie Platz, auf den eine Kirsche gelegt werden kann, lässt sich als ein ungefülltes Gefäß interpretieren. Die Null wird als „Nichts zum Anfassen“ begreifbar (vgl. Zimpel, 2010b).

Frau Knopp bezeichnete den Prototyp des Zehnerfeldes als „schön bunt, aber ehrlich gesagt nicht so praktisch“. Auch Leen offenbarte in der konkreten Handhabung der Holzkirschen und des Zehnerfeldes Schwierigkeiten. Als Grund hierfür könnte die Muskelhypotonie in Betracht kommen, die grundsätzlich mit einer Trisomie 21 einhergeht (vgl. Unterkapitel 2.1). Hinzu kommen Schwächen in der materiellen Konstruktion des Prototyps, wie etwa eine zu geringe Tiefe der Aussparungen und zu starke Magnete. Das Hadern mit den Unzulänglichkeiten des Materials verlangte viel Aufmerksamkeit und lenkte den Fokus häufig von der eigentlichen, mathematisch motivierten Handlung am Material ab. Ein weiteres Problem ergab sich im schrittweise erfolgenden Aufbau der Mengenbilder. Bei der Aufgabe, eine Anzahl an Kirschen in das Zehnerfeld zu legen, vergaßen Frau Knopp und Leen regelmäßig das Überspringen der mittleren Zeile vor dem Setzen der fünften Kirsche. Dies führte dazu, dass sie ständig korrigiert werden mussten, was sich wiederum negativ auf ihre Motivation auswirkte.

Der Prototyp des Zehnerfeldes erwies sich als verbesserungswürdig. Insbesondere die schlechte Handhabbarkeit und die fehlende Unterstützung beim Setzen der Mengenbilder wirkten sich negativ auf die Arbeit mit dem Material aus. Der Prototyp bürgte zu viele Freiheitsgrade, um den Vorteil der speziellen Mengenbilder nachvollziehen zu können.

7.1.3 Umsetzung der Kriterien

Im Folgenden wird der Prototyp des Lernmaterials auf die Erfüllung der zuvor aufgestellten Kriterien (vgl. Anhang, S. 5 im elektronischen Zusatzmaterial) überprüft.

Allgemeine Kriterien
In Hinblick auf die geforderte Isolation von Eigenschaften kann festgestellt werden, dass maßgebliche Eigenschaften der Mengenbilder, wie die Zweierbündelung und die spezifische Verteilung dieser Zweierbündel durch die Struktur des Zehnerfeldes, isoliert vorgegeben sind. Die korrekte Legereihenfolge der stilisierten Kirschen und damit die spezifische Anordnung der Mengenbilder werden nicht abgebildet, was sich negativ auf die selbständige Erarbeitung des Materials auswirkt.

Eine Prüfung, ob ein Mengenbild korrekt erkannt wurde, ist nicht möglich. Das Kriterium der Fehlerkontrolle ist daher nicht erfüllt.

Das Material wurde von Frau Knopp zwar als „schön bunt" bezeichnet, von einer abgestimmten Form- und Farbgebung kann in diesem Prototypstadium allerdings noch nicht die Rede sein. Weder das Kriterium der Ästhetik noch das der kindgerechten Handhabung ist erfüllt; das Material ist nicht leicht zu händeln, einzelne Operationen erfordern ein hohes Maß an Aufmerksamkeit.

Letztlich erfüllt dieser erste Prototyp keines der allgemeinen Kriterien.

Kriterien für Anschauungsmaterialien
Die angestrebte Redundanz des Materials wird bereits in diesem Stadium der Entwicklung deutlich. Die verwendeten Mengenbilder basieren auf Ergebnissen und Ideen der Trisomie-21-Forschung und sind mutmaßlich mental abbildbar.

Das Lernmaterial bietet bisher noch keine Orientierungsgrundlage, die ein selbständiges Erschließen der Handlung ermöglicht. Das Kriterium des Angebots wesentlicher Operationen ist ebenfalls noch nicht erfüllt. Zwar ist das Zählen von Elementen bereits möglich, aber Zahlzerlegungen sowie Additions- und Subtraktionsaufgaben sind noch nicht durchführbar. Die Handlung mit dem Material kann verbalisiert werden, eine geeignete Form der Verbalisierung wurde allerdings noch nicht herausgearbeitet. Das Kriterium der Möglichkeit der Materialisierung stellt das einzige in dieser Kategorie dar, das erfüllt wurde: Die Mengenbilder, die mit dem Prototyp des Lernmaterials gelegt werden, können als Abbildungen auf Karten materialisiert werden.

Kriterien für Mengendarstellungen
Das neu entwickelte System zur Darstellung von Mengen bietet eine aufbauende Struktur. Dank der Darstellung der Mengenbilder im Zehnerfeld ist die Zehnerzerlegung in jedem Mengenbild ersichtlich. Eine (quasi-)simultane Erfassbarkeit jedes Mengenbildes ist auch unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie gegeben. Das Spiel zur Kurzzeitdarstellung, das gemeinsam mit einer der Untersuchungspersonen entwickelt wurde, ist ein Hinweis darauf, dass automatisierende Rechenübungen mithilfe der Mengendarstellungen durchführbar sind.

Die Kriterien für Mengendarstellungen können damit (unter Vorbehalt) als erfüllt bezeichnet werden.

Die Kriterien für die Mengendarstellung hat die erste Iteration des Materials bereits erfüllt. Den anderen Kriterien wird der erste Prototyp des Lernmaterials allerdings nicht gerecht. Er weist insbesondere massive Mängel in der Handhabung und der Vermittlung einer Orientierungsgrundlage auf. In der Entwicklung der zweiten Iteration des Lernmaterials sollte eine Erscheinungsform des Materials gewählt werden, die diese Mängel adressiert.

7.2 Iteration 2: Zehnerfeld in der App mathildr

Die zweite Iteration des Lernmaterials hat die Gestalt einer Tablet-App. Sie wurde von Oktober 2015 bis September 2016 entwickelt und durch drei Kinder mit Trisomie 21 im Alter von sieben bis elf Jahren erprobt.

Mit der Entwicklung der zweiten Iteration des Lernmaterials sollten die Lücken, die der erste Prototyp in der Erfüllung der aufgestellten Kriterien aufgezeigt hatte, geschlossen werden. In Beratungsgesprächen an der Universität Hamburg wurde deutlich, dass seitens der Eltern und Pädagog*innen von Kindern bzw. Schüler*innen mit Trisomie 21 Interesse bestand, das Lernmaterial einzusetzen und zu erproben. Deshalb wurde als weitere Zielsetzung das Finden einer Möglichkeit definiert, das Lernmaterial für Interessierte zugänglich zu machen.

7.2.1 Untersuchungspersonen und Methodik

Erneut unterstützte Leen (mittlerweile 11;2 Jahre) die Entwicklung des Materials. Außerdem war die Schülerin Noa (6;11 Jahre) an der Entwicklung des Materials beteiligt. Sie lebt unter den Bedingungen einer Trisomie 21 und wies zum

Zeitpunkt der Entwicklung keinen entwickelten Zahlbegriff auf. Michel, der zu Beginn der Entwicklung des Materials 7;4 Jahre alt war, hat ebenfalls eine Trisomie 21. In der Untersuchung zur Zahlbegriffsentwicklung löste er alle Aufgaben korrekt.

Alle Untersuchungspersonen erhielten einmal wöchentlich eine mathematische Förderung beim Autor. Der Förderzeitraum variierte; teilweise konnte mit der Schule der Untersuchungspersonen zusammengearbeitet werden. Auch in diesem Teil der Entwicklungsphase wurden alle Fördereinheiten aufgezeichnet. Von Interesse waren erneut Beobachtungen zum Umgang mit dem neuen Material und die Einschätzung der Untersuchungspersonen.

7.2.2 Entwicklung einer App

7.2.2.1 Vorüberlegungen

Im Zuge der Erprobung der ersten Iteration des Lernmaterials wurde deutlich, dass sich die Mengenbilder (zweiter Entwurf) dazu eignen, auch unter der Bedingung einer Simultandysgnosie auf einen Blick erfasst zu werden. Die einzelnen stilisierten Kirschen dürfen dazu allerdings nicht willkürlich auf dem Zehnerfeld verteilt werden, sondern müssen in der erarbeiteten Struktur auftreten. Bei der Arbeit mit dem Zehnerfeld aus Holz erfuhren die Lernenden seitens des Materials keine Hinweise zum korrekten Aufbau des Mengenbildes. Ihnen fehlte also die Orientierungsgrundlage, um sich die Kerneigenschaften der Mengenbilder zu vergegenwärtigen. Der Aufbau der Mengenbilder hat sich außerdem als nicht vollständig intuitiv erwiesen. Lernende, die mit dem Holz-Prototyp arbeiteten, hätten zur selbständigen Erarbeitung des Materials geeignete Mengenbilder selbst erfinden müssen. Unter der Bedingung, dass das Mengenverständnis der Lernenden noch weiterentwickelt werden sollte, stellt dies eine nicht erfüllbare Anforderung dar. Eine Weiterentwicklung des Holzprototyps sollte daher möglichst den Lernenden nicht nur zeigen, an welcher Stelle Kirschen platziert werden sollten, um dem Schema der Mengenbilder zu folgen, sondern auch eine fehlerhafte Darstellung der Mengenbilder vermeiden. Auf diese Weise würden sie sich den speziellen Aufbau der Mengenbilder vergegenwärtigen und voraussichtlich einprägen können.

Bei der neuen Iteration des Lernmaterials sollte es sich folglich nicht nur um ein passives Werkzeug zur Darstellung handeln, sondern vielmehr um eine Maschine, die gewissen Restriktionen unterliegt und nur auf ein bestimmte Art und Weise bedient werden kann. Es lag nahe, die Verwirklichung dieser Maschine

mithilfe einer Software zu realisieren. Der Autor entwickelte im Rahmen seiner Masterarbeit eine Tablet-App, die Schüler*innen mit Muskelhypotonie eine Alternative zum Schreiben von Zahlen und Rechenaufgaben mit Stift und Papier bot. Dabei spielte insbesondere die Erkenntnis eine Rolle, dass die Motivation an der Arbeit mit Zahlen darin getrübt sein kann, dass ein feinmotorisch herausforderndes Aufschreiben von Zahlenreihen oder Rechenaufgaben die volle Aufmerksamkeit der lernenden Person bedarf und den Mathematikunterricht bremst (Rieckmann, 2014, S. 47). Darüber hinaus bestehen weitere gute Gründe, das Lernmaterial als App umzusetzen. So ermöglichte die Entwicklung des hier vorgestellten Lernmaterials als Tablet-App

- die Schaffung einer Orientierungsgrundlage durch unterstützende und restriktive Mechanismen beim Erstellen von Mengenbildern,
- die vereinfachte Bedienung unter den Bedingungen einer Muskelhypotonie,
- eine einfache und kostengünstige Verbreitungsform des Lernmaterials (vorausgesetzt, ein Tablet-PC und ein Internetanschluss sind verfügbar),
- die Möglichkeit der Erweiterung und Verbesserung des Lernmaterials durch Updates und
- ein individualisiertes Lernen, das sich am Entwicklungsstand der Schüler*innen orientiert und zur Verbesserung der Barrierefreiheit beiträgt.

Die benötigte Unterstützung zur Entwicklung einer Tablet-App erhielt der Autor durch Rolf Rieckmann, der die App entwickelte, und Dennis Krohn, der sich für die grafische Gestaltung verantwortlich zeigte.

7.2.2.2 Technische und grafische Realisierung

Die App wurde durch Rolf Rieckmann mithilfe der objektorientierten Skriptsprache JavaScript sowie HTML5 und CSS entwickelt. Da diese in jedem Internetbrowser aufgerufen werden kann, lässt sie sich plattformunabhängig auf nahezu allen aktuellen Tablets und Smartphones verwenden. Dies erlaubt den Einsatz und Wechsel verschiedener Prototypen in der Mathematikförderung.

Darüber hinaus ist über diesem Wege auch eine Verbreitung möglich: Die App kann als sog. Progressive Web App angeboten werden, die über den Internetbrowser des Tablets auf dem Home Screen installiert wird. Auf Seiten der Entwickler*innen bietet dies die Möglichkeit, die App unabhängig von den App Stores der Gerätehersteller zur Verfügung zu stellen und instand zu halten. (Petereit, 2020).

Die grafische Gestaltung der App wurde durch Dennis Krohn realisiert. Dieser nutzte das vektorbasierte Programm Adobe Illustrator, um sämtliche Grafiken

der App zu erstellen (vgl. Adobe, 2020). Die Grafiken werden in der App im SVG-Format ausgegeben und können daher ohne Qualitätsverlust an die Bildschirmgrößen sämtlicher Endgeräte angepasst werden. Bei der grafischen Gestaltung legte Krohn Wert darauf, den Aufforderungscharakter der App durch ein attraktives Erscheinungsbild zu gewährleisten.

7.2.2.3 Kernfunktionalität Zehnerfeld

Das technische wie auch didaktische Herzstück der App bildet das Zehnerfeld, in dem die Mengenbilder 0 bis 10 dargestellt werden können. Durch spezifische Funktionen und Restriktionen sollte eine Auseinandersetzung mit den Mengenbildern ermöglicht werden, die zu den gewünschten Lernzielen führen kann. Im Folgenden wird das Konzept des Zehnerfeldes vorgestellt. In einem Proof of Concept wurde eine erste technische Realisierung vorgenommen.

7.2.2.3.1 Konzept

Das Zehnerfeld wird rund dargestellt, um dem Charakter eines Hohlmaßes zu entsprechen, beispielsweise einer Schale, die gefüllt werden kann. Zum korrekten Aufbau der Mengenbilder sollte innerhalb der App eine Restriktion der Reihenfolge des Befüllens durch Kirschen realisiert werden, die in Abbildung 7.20 schematisch dargestellt wird.

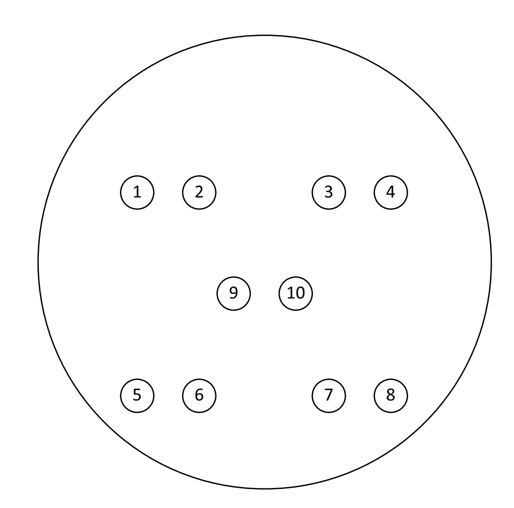


Abbildung 7.20 Konzeptzeichnung leeres Zehnerfeld mit Nummerierung der Reihenfolge zur Befüllung mit stilisierten Kirschen

Zur Darstellung der Bedienung des Zehnerfeldes wurde ein Storyboard erstellt, das in Abbildung 7.21 auszugsweise wiedergegeben wird. Das komplette Storyboard befindet sich in Form einer Bildfolge im Anhang auf S. 7 im elektronischen Zusatzmaterial.

Um die Nutzer*innen der App darin zu unterstützen, die Mengenbilder in der richtigen Reihenfolge zu legen und eine mögliche Frustration beim wiederholten Antippen der falschen freien Plätze zu vermeiden, sollten die korrekten Plätze markiert werden. Da die Kirschen auch paarweise gelegt werden können, sollten je nach Ausgangslage ein oder zwei Felder markiert werden. Im Mengenbild der 0 wären die ersten beiden Plätze markiert, im Mengenbild der 1 wäre lediglich der zweite markiert. Im Mengenbild der 2 wären wiederum die Plätze 3 und 4 markiert, beim Mengenbild der 3 lediglich der Platz 4 usw. Weiterhin war die Integration eines Schalters vorgesehen, der auf Berührung das Zehnerfeld in seinen Ursprungszustand bringt, also alle Kirschen aus dem Zehnerfeld entfernt, sodass das Mengenbild der 0 gezeigt wird. Die gesamte Mechanik des Zehnerfeldes wurde in Form eines Flussdiagrams dargestellt (siehe Anhang, S. 9 im elektronischen Zusatzmaterial).

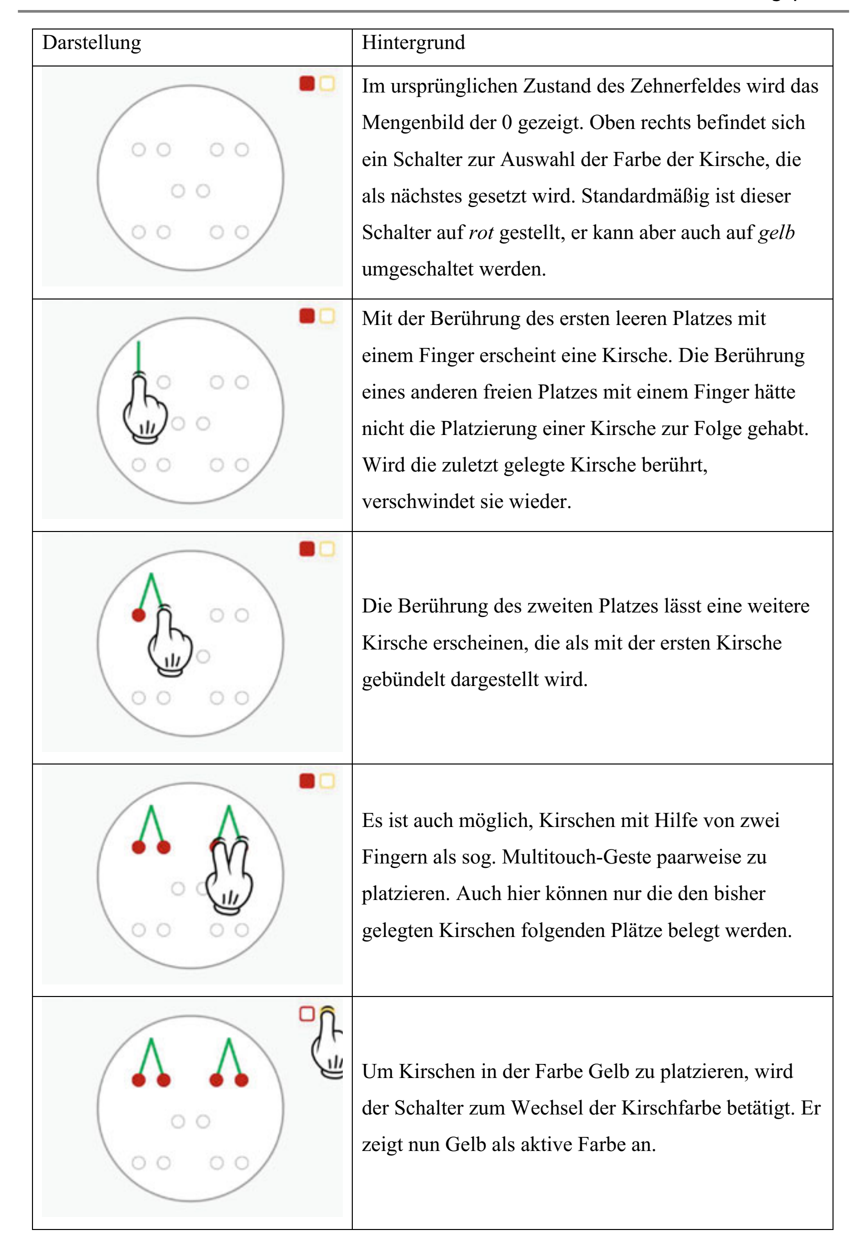
Das Konzept des Zehnerfeldes wurde Rolf Rieckmann und Dennis Krohn vorgelegt, die dieses in einem Proof of Concept umsetzten, das eine technische und gestalterische Machbarkeit bestätigen und die Möglichkeit zur Erprobung der Bedienung ermöglichen sollte.

7.2.2.3.2 Proof of Concept

Der erste Prototyp der App zeigte eine erste Version der neuen grafischen Darstellung der Mengenbilder, die von Dennis Krohn stammt. Der Schalter zum Farbwechsel wurde als stilisierter Farbtropfen umgesetzt, der entweder rot oder gelb erscheint. Zum Zurücksetzen des Feldes wurde ein Schalter in Form eines roten Xs integriert (Abbildung 7.22).

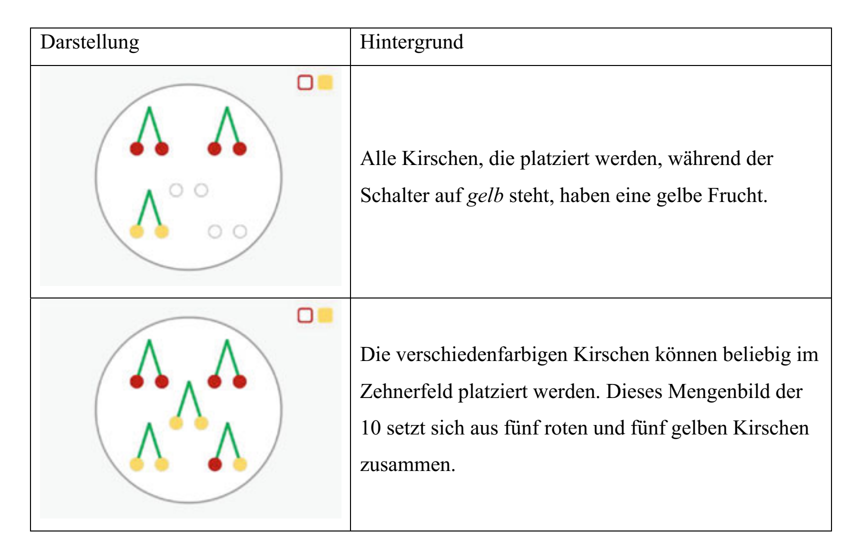
Dieser Prototyp wurde gemeinsam mit Leen erprobt (Abbildung 7.23), der sehr interessiert war, allerdings einige Schwierigkeiten im Umgang mit der App zeigte. Folgende Beobachtungen wurden getätigt:

- Die farbenfrohe Erscheinung der App besitzt einen hohen Aufforderungscharakter.
- Die Markierungen, die darauf hinweisen, an welcher Stelle die nächsten Kirschen platziert werden können, führen beim schrittweisen Hinzufügen einzelner Kirschen zu Irritationen, da im Wechsel eines oder zwei Felder markiert werden.
- Die weiteren Bedienelemente sind verständlich, aber zu klein.
- Wenn freie Felder zu lang berührt werden, erscheinen keine Kirschen.



Darstellung	Hintergrund
	Im ursprünglichen Zustand des Zehnerfeldes wird das Mengenbild der 0 gezeigt. Oben rechts befindet sich ein Schalter zur Auswahl der Farbe der Kirsche, die als nächstes gesetzt wird. Standardmäßig ist dieser Schalter auf *rot* gestellt, er kann aber auch auf *gelb* umgeschaltet werden.
	Mit der Berührung des ersten leeren Platzes mit einem Finger erscheint eine Kirsche. Die Berührung eines anderen freien Platzes mit einem Finger hätte nicht die Platzierung einer Kirsche zur Folge gehabt. Wird die zuletzt gelegte Kirsche berührt, verschwindet sie wieder.
	Die Berührung des zweiten Platzes lässt eine weitere Kirsche erscheinen, die als mit der ersten Kirsche gebündelt dargestellt wird.
	Es ist auch möglich, Kirschen mit Hilfe von zwei Fingern als sog. Multitouch-Geste paarweise zu platzieren. Auch hier können nur die den bisher gelegten Kirschen folgenden Plätze belegt werden.
	Um Kirschen in der Farbe Gelb zu platzieren, wird der Schalter zum Wechsel der Kirschfarbe betätigt. Er zeigt nun Gelb als aktive Farbe an.

Abbildung 7.21 Ausschnitte des Storyboards zur Funktionalität des Zehnerfeldes in der App mit Erklärung



Darstellung	Hintergrund
	Alle Kirschen, die platziert werden, während der Schalter auf *gelb* steht, haben eine gelbe Frucht.
	Die verschiedenfarbigen Kirschen können beliebig im Zehnerfeld platziert werden. Dieses Mengenbild der 10 setzt sich aus fünf roten und fünf gelben Kirschen zusammen.

Abbildung 7.21 (Fortsetzung)

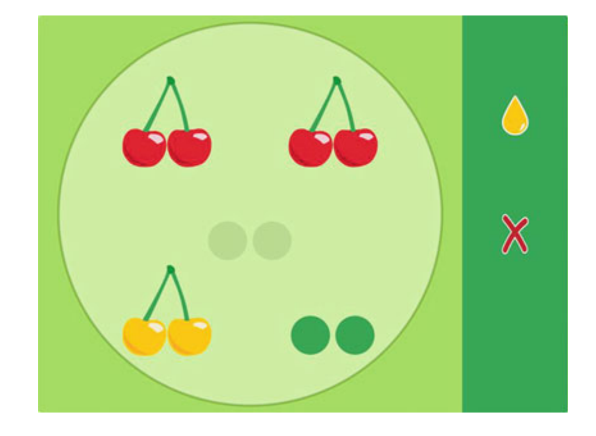


Abbildung 7.22 Screenshot Proof of Concept. Deutliche Markierungen zeigen, auf welche Positionen folgende Kirschen gelegt werden können. Auf der rechten Bildschirmseite befinden sich die Buttons zum Verändern der Kirschfarbe und Zurücksetzen des Zehnerfeldes

Eine Optimierung der Touch-Steuerung und der grafischen Darstellung wurde in der ersten Version der App vorgenommen, über die im Folgenden berichtet wird.

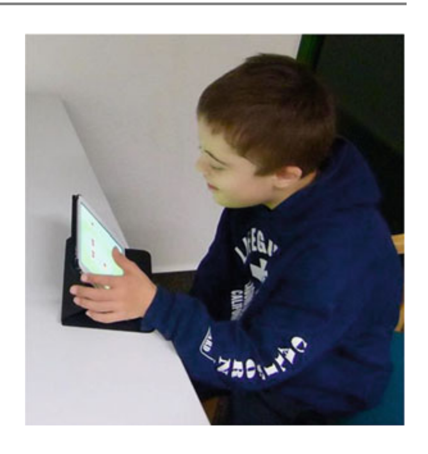


Abbildung 7.23 Leen erprobt den Prototyp des Zehnerfeldes auf dem Tablet

7.2.2.4 mathildr-App

Neben dem Zehnerfeld, das bereits als Proof of Concept vorlag, mussten weitere Elemente der App realisiert werden, damit sie den Kriterien des zu gestaltenden Lernmaterials entspricht. Bei der Namensgebung der App (und damit auch des Lernmaterials und des Systems zur Darstellung von Mengen) wurde Wert darauf gelegt, dass analog zur grafischen Gestaltung ein modernes Erscheinungsbild erzeugt wird. Dabei wurde berücksichtigt, dass die App nicht nur von Kindern, sondern auch von Jugendlichen und Erwachsenen mit Simultandysgnosie verwendet werden kann, weshalb ein Name vermieden werden sollte, der allzu kindlich oder verspielt wirkt. Die Wahl fiel auf das Kunstwort *mathildr*, das wie der Vorname *Matilda* ausgesprochen wird. Am Anfang des Namens steht *math*, die amerikanisch-englische Kurzform von *mathematics*. Die Endung *r* steht ersatzweiße für *a* und wird in App-Namen wie *flickr* oder *tumblr* verwendet, damit diese als modern empfunden werden (Kershner, 2016). Die Kleinschreibung des Namens soll ebenfalls zur modernen Wirkung des Wortes sowie zu einer harmonischen Wirkung des Wortbildes beitragen.

7.2.2.4.1 Konzept

Die App bestand in ihrer ersten Version aus vier möglichen Ansichten: dem Zehnerfeld, dem Einstellungsmenü (Abbildung 7.24), dem Hauptmenü und dem Hilfe-Menü. Ein Flussdiagramm der Navigation zwischen diesen Bildschirmen findet sich im Anhang, S. 10 im elektronischen Zusatzmaterial.

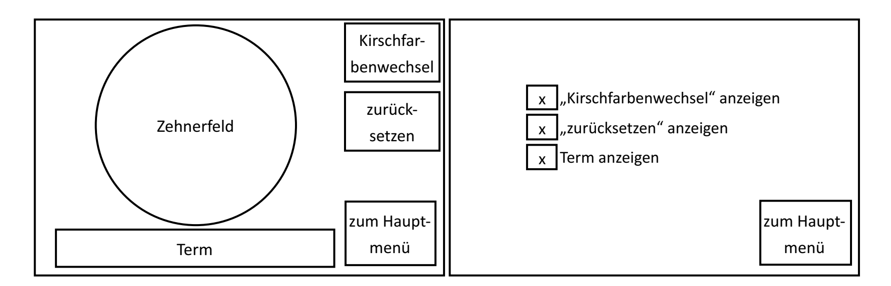


Abbildung 7.24 Konzeptzeichnungen der Ansichten Zehnerfeld und Einstellungen

Das Hauptmenü ermöglichte die Auswahl zwischen den Optionen *Spielen*, *Hilfe* und *Einstellungen*. Hinter der Auswahl *Spielen* verbarg sich die Darstellung des Zehnerfeldes inklusive Buttons zum Wechseln der Kirschfarbe und zum Zurücksetzen des Feldes. Weiterhin sollte im *Term*-Feld unter dem Zehnerfeld in Echtzeit die Zusammensetzung der Kirschen im Zehnerfeld in Zahlenform wiedergegeben werden. Diese Zahlen sollten die Farbe der entsprechenden Kirschen tragen und ggf. vorhandene Zahlzerlegungen anzeigen. In dieser Ansicht sollte sich außerdem ein Button befinden, der zurück zum Hauptmenü führt.

Für gewisse Lernsituationen wurden der Button zum Wechsel der Kirschen oder die Anzeige des Terms als störend eingeschätzt. Daher sollte im Einstellungsmenü das Ausblenden von optionalen Elementen in der Ansicht des Zehnerfeldes ermöglicht werden.

7.2.2.4.2 Umsetzung

Es wurden mehrere Versionen der App entwickelt und technisch erprobt, bevor mit der Version 1.1 eine App vorlag, die alle Aspekte des Konzepts erfüllte. Das Interfacedesign wurde im Vergleich zum Proof of Concept des Zehnerfeldes und zum Konzept der App verbessert. Bei der Gestaltung des Hauptmenüs wurde berücksichtigt, dass die Buttons, die zur Hilfe oder den Einstellungen leiten, einen geringeren Aufforderungscharakter aufweisen als der Button *Spielen*, der zur Ansicht des Zehnerfeldes führt (Abbildung 7.25).

Im Einstellungsmenü wurde eine Echtzeitvorschau des Zehnerfeldes eingeblendet, sodass die Nutzer*innen die Auswirkungen der Optionen im Blick haben konnten. Durch Antippen der Elemente auf der rechten Seite konnten diese im Zehnerfeld deaktiviert und bei erneutem Antippen wieder aktiviert werden. Deaktivierte Elemente wurden grau dargestellt. Das Hilfemenü wies auf die



Abbildung 7.25 Screenshots des Hauptmenüs in mathildr 1.1

Website der App hin, die Informationen zur pädagogischen Arbeit mit der App bereitstellte (Abbildung 7.26).

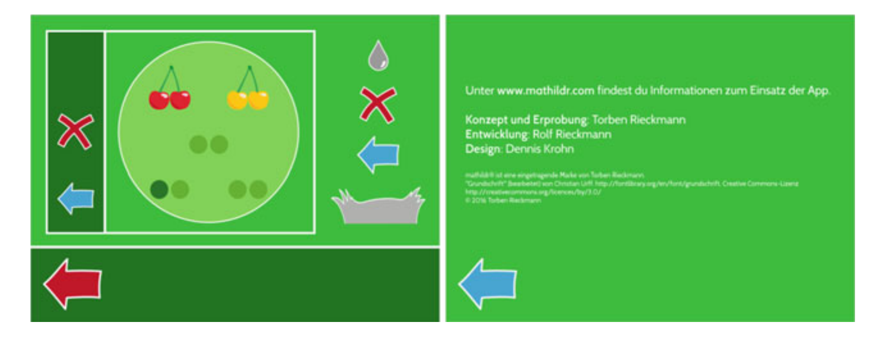


Abbildung 7.26 Screenshots des Einstellungs- und des Hilfemenüs. Der Farbwechsel-Button und das Term-Element sind deaktiviert und damit ausgeblendet

Die Ansicht des Zehnerfeldes wurde optimiert, indem die Bedienelemente auf die linke Seite gerückt sind und Rechtshänder*innen nicht an den Elementen vorbeigreifen müssen, um die Kirschen im Zehnerfeld zu platzieren. Außerdem wurden die Form- und Farbgebung sowie die Größen der Elemente verbessert und das Term-Element wurde integriert (Abbildung 7.27).

Die Markierung zur weiteren Platzierung von Kirschen wurde im Vergleich zum Prototyp im Proof of Concept angepasst. Nun wird lediglich ein Feld markiert und nicht die zwei Felder, die mithilfe einer Multitouch-Geste gleichzeitig mit Kirschen gefüllt werden können.

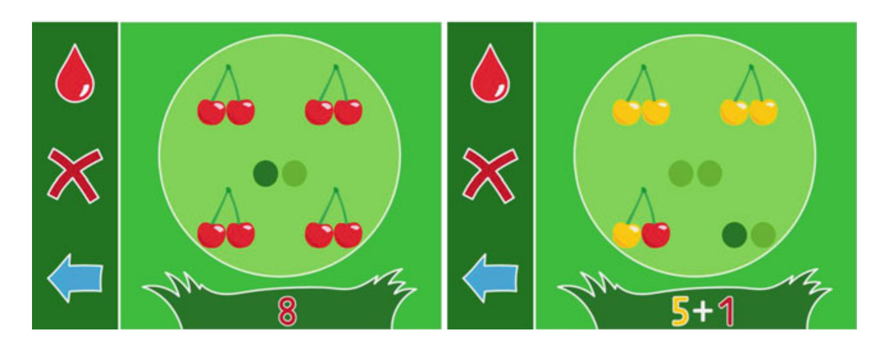


Abbildung 7.27 Screenshots des Zehnerfeldes in mathildr 1.1

Zur Darstellung der Zahlen und des Textes im Hilfemenü wurde die Grundschrift[1] von Christian Urff verwendet.

Neben der Verbesserung des Interfacedesigns wurde ebenso das zugrundeliegende Script angepasst, um die Bedienbarkeit zu verbessern. Ob ein Button als gedrückt gilt oder eine Kirsche platziert wurde, war nun nicht mehr von der Dauer der Berührung abhängig. Darüber hinaus wurden weitere Optimierungen vorgenommen, die die Funktion der App gewährleisteten.

Die App wurde erstmals im Januar 2016 der Öffentlichkeit zugänglich gemacht.

7.2.3 Erprobung

Die Lernmaterialien wurden im Rahmen der Mathematikförderung dreier Kinder mit Trisomie 21 an der Beratungsstelle der Universität Hamburg erprobt. Diese Förderungen resultierten in einer Erweiterung des Materials durch Materialisierungen, einer Herausarbeitung von didaktischen Einsatzmöglichkeiten der Lernmaterialien und in Hinweisen, die zum Update der App und damit zur dritten Iteration des Lernmaterials führten. Im Folgenden werden wesentliche Erkenntnisse aus den Erprobungen dargestellt.

---

[1] Grundschrift (bearbeitet) von Christian Urff, https://fontlibrary.org/en/font/grundschrift, Lizenz CC BY 3.0, https://creativecommons.org/licenses/by/3.0/

7.2.3.1 Noa lernt zählen

Im Alter von 6;11 Jahren besuchte Noa, ein Mädchen mit Trisomie 21, erstmals die Beratungsstelle. An knapp 30 Terminen, die ein- bis zweimal wöchentlich stattfanden und in den Ferien pausierten, wurde Noa nicht nur in der Mathematik, sondern auch in der Schriftsprache gefördert. Noa zeigte anfangs nur wenig Interesse an Zahlen. Die Zahlwortreihenfolge fiel ihr schwer, häufig vermischte sie die 2 und die 3 und zählte „Eins, *zwrei*, vier, fünf, sechs …". Beim Ermitteln einer Menge zählte sie einzelne Elemente gelegentlich mehrfach und legte sich nicht auf eine Zahl zur Bezeichnung der Menge fest. Ihr großes Interesse galt dem Sujet- und Rollenspiel (vgl. Zimpel, 2011), in dessen Rahmen einige Aktivitäten initiiert werden konnten, die das Zählen beinhalteten. So wurde beispielsweise ein Tisch mit Puppengeschirr für drei Personen gedeckt oder Noa schlüpfte in die Rolle einer Lehrerin, die dem Autor, der die Rolle des Schülers einnahm, das Zählen erklärte.

Ein besonderes Spiel, bei dem die mathildr-App eine zentrale Rolle spielte, konnte bereits in einer der ersten Sitzungen entwickelt werden und wurde in der Folge häufig wiederholt. Noa hat es sich zur Aufgabe gemacht, einen kleinen Ball mit einigen Metern Abstand in eine offene Aufbewahrungsbox zu werfen. Der Autor schlug ihr vor, ein Tablet mit der mathildr-App neben diese Box zu stellen und bei jedem Treffer eine Kirsche im Zehnerfeld zu platzieren (Abbildung 7.28).



Abbildung 7.28 Noas Ballspiel. Die Straßenschuhe markieren den Abstand zur Box, der eingehalten werden muss

Diese Vorgehensweise entzerrte den Zählprozess stark, da nicht jeder Wurf zu einem Treffer führte und das Einsammeln des Balls sowie das Einnehmen der Wurfposition Zeit in Anspruch nahmen. Von größerer Bedeutung schien allerdings, dass das Zählen für Noa einen persönlichen Sinn ergab (vgl. Leont'ev, 2012, S. 249 ff.). Freute sie sich zuvor über jeden Treffer, konnte sie nun anhand

der Kirschen nachvollziehen, wie häufig sie getroffen hatte. Als sie am Ende des Termins von ihrem Vater abgeholt wurde, berichtete sie ihm freudestrahlend: „Ich habe zehnmal getroffen!“.

Das Zählen und gleichzeitige Platzieren von Kirschen im Zehnerfeld fiel ihr leichter als das Zählen von bereits bestehenden Objekten. Vorausgesetzt, die korrekte Reihenfolge des Legens der Mengenbilder wird eingehalten, erscheint mit jedem Fingerdruck eine Kirsche. Dieses grafische Feedback ist beim Zählen von analogen Objekten indes nicht vorhanden. Durch die Möglichkeit der Einblendung der Zahlen konnte sich Noa außerdem rückversichern, wie viele Kirschen bereits in dem Feld zu sehen sind, und eine Verknüpfung zwischen Mengenbild, Zahlwort und Ziffer vornehmen.

Um die Mengenbilder in weiteren Spielsituationen einsetzen zu können, wurde eine Materialisierung vorgenommen: Die Mengenbilder 0 bis 10 wurden auf Karten in Skatblattgröße gedruckt. Dabei wurde das Mengenbild der 0 zweimal gedruckt und die Mengenbilder 1 bis 10 wurden jeweils einmal mit roten Kirschen und einmal mit gelben Kirschen gedruckt. Dies erlaubte Memory- oder einfache Zuordnungsspiele. Noa nutzte den Kartenstapel meistens im Spiel: Vom gemischten Stapel wurde eine Karte gezogen, die zeigt, wie häufig eine zuvor vereinbarte Handlung durchgeführt wird (Abbildung 7.29).



Abbildung 7.29 Noa präsentiert die Mengenkarte 5 während einer Spielsituation

Nach den knapp 30 Terminen zählte Noa sicher bis 10 und konnte alle Mengenbilder bis 10 sicher (quasi-)simultan erfassen. Die Förderung von Noa wurde

daraufhin fortgesetzt; sie ist unter den Untersuchungspersonen der dritten und vierten Iteration vertreten.

7.2.3.2 Michel verinnerlicht die Mengenbilder

Michel war zu Beginn der Entwicklung der zweiten Iteration 7;4 Jahre alt. An sechs Terminen innerhalb eines Jahres arbeitete er gemeinsam mit dem Autor mit der App im Rahmen einer Mathematikförderung. Parallel hierzu arbeitete er mit seinen Eltern und später mit seinen Lehrpersonen und Schulbegleiter*innen mit der App. Michel, der bereits sicher bis 10 zählen konnte, erschloss sich die Funktionen des Zehnerfeldes in kurzer Zeit durch Trial-and-Error. Er fand heraus, wie er eine einzelne Kirsche erzeugen und wieder entfernen kann und welche Bedeutung die Markierung des nächsten freien Platzes hat. Bereits beim ersten Versuch, mehr als vier Kirschen zu legen, übersprang er, der Markierung folgend, die mittlere Reihe und legte die Kirschen in der richtigen Reihenfolge bis 10.

Michel prägte sich die Mengenbilder spielerisch ein, indem er sie in der App erzeugte. Abwechselnd mit dem Autor deckte er eine Zahlenkarte (0 bis 10) vom Tisch auf und legte sie laut zählend im Zehnerfeld der App nach. Anfangs bestand er darauf, die Anzeige der Anzahl der Kirschen im Zehnerfeld eingeblendet zu lassen. Später verzichtete er auf die Anzeige und zählte im Kopf (Abbildung 7.30).

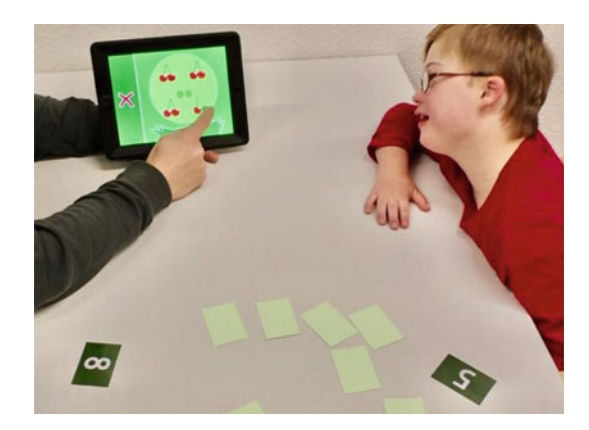


Abbildung 7.30 Der Autor reproduziert acht Kirschen im Zehnerfeld der App. Michel prüft ihn dabei auf Fehler

Im Term-Element der App korrespondieren die Zahlen grundsätzlich farblich mit den dazugehörigen Kirschen. Eine rote Zahl steht dabei für eine bestimmte Anzahl roter Kirschen, eine gelbe für eine bestimmte Anzahl gelber Kirschen. Um vielseitiger einsetzbar zu sein, zeigten die Zahlenkarten weiße Ziffern auf

grünem Grund. Die Zahlen waren ebenfalls in der Grundschriftart gehalten, die auch in der App Verwendung fand. Sie wurden in dieser Form auf der Website zum Download angeboten (siehe Druckvorlage im Anhang, S. 11 im elektronischen Zusatzmaterial). Zur besseren Unterscheidung der Zahlenkarten 6 und 9 weisen diese einen Unterstrich auf. Diesbezüglich gab eine Lehrerin die Rückmeldung, dass eine Schülerin, die sich noch im Lernprozess der Zahlen befand, den Unterstrich als Element der Ziffer missverstanden habe.

Michel prägte sich die meisten Mengenbilder bereits nach kurzer Übungszeit ein. Für das eindeutige Erkennen des Mengenbildes der 7 benötigte er allerdings etwas mehr Zeit. Ab dem fünften Termin gelang es ihm, alle Mengenbilder auf Anhieb zu identifizieren. Seine Mathematik-Förderung wurde in einem anderen Rahmen fortgesetzt; er ist unter den Untersuchungspersonen der dritten Iteration vertreten.

7.2.3.3 Leen rechnet im Kopf

Leen war zu Beginn der zweiten Iteration 11;2 Jahre alt. Er entwickelte und erprobte mit dem Autor Aufgabenformate, die das Einprägen der Mengenbilder und das Rechnen mit der App ermöglichen sollten und zum Nachahmen auf der Internetseite der App veröffentlicht wurden.

Die Bearbeitung von Additionsaufgaben führte Leen bereits nach kurzer Zeit routiniert durch. Im Text auf der Website wurde die Durchführung von Additionsaufgaben folgendermaßen beschrieben:

> Plusaufgaben im Zahlenbereich 0 bis 10 können mit mathildr auf die gleiche Weise wie Zahlzerlegungen dargestellt werden. Lautet die Rechenaufgabe beispielsweise 3 + 5 = ?, legt das Kind drei rote und fünf gelbe Kirschen. Durch die Anzeige unter dem Zehnerfeld kann sich das Kind vergewissern, dass die Aufgabe korrekt gelegt wurde. Das Ergebnis (8) erkennt es ohne Nachzählen und schreibt es auf.

Subtraktionsaufgaben wurden durch schrittweises Abbauen des Mengenbildes des Minuenden durchgeführt. Zur Bearbeitung der Aufgabe 5 – 3 wurden demnach fünf Kirschen platziert, um dann die Kirschen auf Position 5, 4 und 3 nacheinander durch Antippen zu entfernen. Die App zeigt dann nur noch zwei Kirschen an. Ist das Term-Element eingeblendet, zeigt dies ebenfalls nur *2*. Der Minuend ist nicht erkennbar, eine nachträgliche Überprüfung, ob die Rechnung korrekt durchgeführt wurde, ist nicht möglich.

Leen gelangen Subtraktionsaufgaben, diese forderten aufgrund des komplizierten Abbaus der Mengenbilder und der mangelnden Fehlerkontrolle allerdings äußert viel Konzentration und eine hohe Frustrationstoleranz (Abbildung 7.31).



Abbildung 7.31 Leen führt Additions- und Subtraktionsaufgaben mit Hilfe der App durch

Bei der Auseinandersetzung mit Additionsaufgaben wurde deutlich, dass eine Möglichkeit der standardisierten Verbalisierung von Mengenbildern von Nöten ist, um sich über den Aufbau von Mengenbildern auszutauschen. Leen und der Autor einigten sich darauf, zusammenhängende Kirschen als *Paar* zu bezeichnen und eine einzelne Kirsche als *Kirsche*. Das Mengenbild der 5 setzt sich demnach aus zwei Paaren und einer Kirsche zusammen, das der 6 aus drei Paaren. Leen bevorzugte allerdings, die Mengenbilder aufbauend zu verbalisieren. Das Mengenbild der 7 bezeichnete er beispielsweise als *Paar, Paar, Paar, Kirsche*. In einer späteren Iteration der Entwicklung des Lernmaterials wurde anhand des Verhaltens eines anderen Jungen deutlich, dass auf diese Weise der Aufbau der Mengenbilder vor dem inneren Auge begünstigt werden kann. Auch Leen gelang es, die Mengenbilder ohne Vorlage aus dem Gedächtnis zu verbalisieren.

Durch das regelmäßige Üben mit der App lernte Leen Aufgaben des Kleinen $1 + 1$, also Additionsaufgaben im Zehnerraum, auswendig: Wurden ihm Aufgaben gestellt, beantwortete er diese in vielen Fällen schnell und korrekt. War ihm die Beantwortung der Aufgabe aus dem Gedächtnis nicht möglich, versuchte er, die Aufgaben im Kopf zu berechnen. Dies gelang ihm im Fall von Aufgaben, bei denen der erste Summand größer war als der zweite Summand und die Summe nicht größer als 10. Auch Leen unterstützte die Weiterentwicklung des Lernmaterials in der folgenden Iteration.

7.2.3.4 Einsatz des Materials an einer Förderschule

Nach der Veröffentlichung der App begann eine Hamburger Schule mit dem Förderschwerpunkt *geistige Entwicklung*, diese im Mathematikunterricht in den Klassen und im mathematischen Kursunterricht einzusetzen. Die Erprobung

im Schulalltag lieferte einige praktische Hinweise, die für die Weiterentwicklung der App von Relevanz waren. Insbesondere die Installation der App auf verschiedenen Endgeräten brachte einige Erkenntnisse zu Tage:

- Die App lässt sich – ein kompatibles Eye-Tracking-Gerät vorausgesetzt – mit den Augen steuern (Abbildung 7.32).
- Auf einigen älteren Android-Tablets bestehen Darstellungsfehler, die App ist außerdem sehr verlangsamt.
- Auf interaktiven Whiteboards, die auf Projektionstechnologie (Beamer) basieren, verschwimmen die Farben der App, weil sie zu kontrastarm sind.

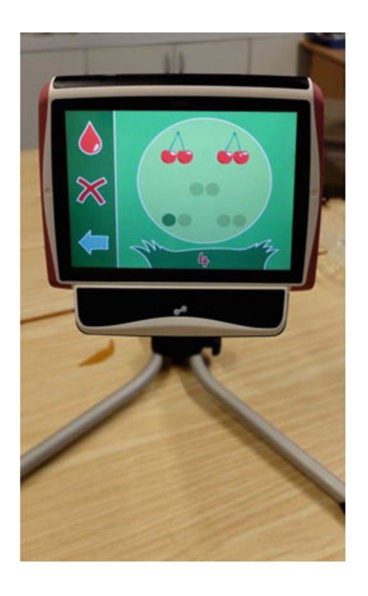


Abbildung 7.32 Die App ließ sich mit dem Computer eines Kindes verwenden, das diesen mit den Augen steuerte

Weiterhin bewährte sich auch in diesem Rahmen das Zehnerfeld in der App aufgrund des visuellen Feedbacks der erscheinenden Kirsche und der Möglichkeit zum Einblenden der Anzahl zum Zählenüben.

Darüber hinaus entstanden im Kursunterricht der Schule Lernideen, die zur ertragreichen Arbeit mit mathildr in der Gruppe beitragen können. Besonders beliebt war der Einsatz der App zur Darstellung einer Handlungsfolge, im Speziellen im Zusammenhang mit der Motorik:

> Die Bewegungsphase im Tagesablauf wird mit einer kleinen Lerngruppe in Form eines Rundenlaufs gestaltet. Ein Schüler übernimmt mit der mathildr-App das Zählen der Runden: Jedes Überschreiten der Ziellinie wird durch das Setzen einer Kirsche in der App markiert. Das Endergebnis wird schriftlich festgehalten, indem die Zahl aus der App abgeschrieben wird. Alternativ wird eine zu erreichende Rundenzahl mit einer Zahlenkarte zuvor festgelegt. Mit Hilfe der App wird der Moment ermittelt, in dem die rundenlaufende Schülerin ihre Rundenzahl erreicht hat. (Hoffmann & Rieckmann, 2019, S. 55)

Das Lernmaterial wird in seiner aktuellen Iteration weiterhin an der Schule eingesetzt.

7.2.4 Umsetzung der Kriterien

Erneut wird die Umsetzung der zuvor aufgestellten Kriterien (vgl. Anhang, S. 5 im elektronischen Zusatzmaterial) überprüft.

Allgemeine Kriterien
Die App, die die zweite Iteration des Lernmaterials darstellt, hebt die Eigenschaften der Mengenbilder isoliert hervor. Selbst die korrekte Legereihenfolge der Mengenbilder ist vorgegeben und ermöglicht ein selbständiges Erschließen des Lernmaterials.

Das Term-Element ermöglicht die Kontrolle, ob ein Mengenbild korrekt erkannt wurde. Eine Fehlerkontrolle ist auch bei Additionsaufgaben möglich: Die Aufgabe wird im Term-Element wiedergegeben, das Ergebnis (die Summe) in Form des zusammengesetzten Mengenbildes.

Subtraktionsaufgaben können nicht kontrolliert werden.

Die Ästhetik und die kindgerechte Handhabung wurden im Vergleich zur ersten Iteration deutlich gesteigert. Lediglich als Bildprojektion ist das Lernmaterial noch nicht geeignet.

Kriterien für Anschauungsmaterialien
Dass das Lernmaterial redundant wird, indem es Lernende befähigt, eingeübte Operationen mental durchzuführen, zeigen die Beobachtungen in der Förderung von Leen. Eine Evidenz, dass Lernende mit Simultandysgnosie tatsächlich ein inneres Bild der Mengenbilder entwickeln, lag an dieser Stelle aber noch nicht vor.

Die zugrundeliegende Mechanik des Zehnerfeldes der App stellt einen Beitrag zur Orientierungsgrundlage dar. Lernende können sich selbständig mit dem Material auseinandersetzen und dieses handelnd erschließen. Mit dem Zählen sowie der Darstellung von Mengen und von Zahlzerlegungen bzw. Additionsaufgaben werden bereits wesentliche Operationen der Handlung möglich. Die Subtraktion wird allerdings noch nicht eindeutig dargestellt. Eine Verbalisierungsmöglichkeit ist durch die Beschreibung der Struktur der Mengenbilder durch *Paar* und *Kirsche* gegeben. Die Mengenbilder können als Abbildungen auf Karten materialisiert werden und sinnvoll zum Lernprozess beitragen.

Die *Kriterien für die Darstellung von Mengen* wurden bereits in der ersten Iteration nahezu vollständig erfüllt. Allerdings ist in der zweiten Iteration nach wie vor die quasi-simultane Erfassbarkeit von Mengen im Zahlenraum 11 bis 20 noch nicht möglich. Insgesamt erfüllt die neue Form des Lernmaterials als App deutlich mehr Kriterien als die erste Iteration aus Holz.

7.3 Iteration 3: Erweiterung der App, Entwicklung von Materialisierungen

In der dritten Iteration des Lernmaterials wurden der Umfang, die Gestaltung und die Individualisierungsmöglichkeiten der App angepasst. Mithilfe von Kompetenzrastern wurden die Lernfortschritte von 30 Lernenden im Alter von 4 bis 17 Jahren nachgezeichnet.

In dieser Entwicklungsphase wurden mehrere Ziele verfolgt. Einerseits sollten Lücken, die sich in der vorherigen Iteration zeigten, geschlossen werden. Andererseits sollte die App erstmals systematisch anhand von mehreren Lernenden evaluiert werden. In den Iterationen zuvor wurden Entscheidungen zur Gestaltung des Lernmaterials anhand der Beobachtungen weniger Untersuchungspersonen getroffen. Die dritte Iteration der App sollte mit mehr Lernenden erprobt werden, um die getroffenen Entscheidungen zu validieren.

7.3.1 Weiterentwicklung der App

Die dritte Iteration des Lernmaterials wurde erstmals als *mathildr Version 1.2* veröffentlicht. Es folgten weitere Updates bis hin zur Version 1.2.9, deren Erscheinungsbild und Funktionsumfang im Folgenden dargestellt werden. Dieses Update der App erhöhte die Kompatibilität mit älteren Android-Tablets und iPads.

7.3.1.1 Gestaltung und Einstellungsmöglichkeiten

Die neue Version der App ermöglicht neben der Arbeit mit dem Zehnerfeld auch das Arbeiten mit dem Vierer- und Zwanzigerfeld. Um zu den Feldern zu gelangen, wurde die Navigation im Hauptmenü überarbeitet. Außerdem wurde ein Rabe als Maskottchen hinzugefügt, um die Attraktivität der App zu steigern und neben dem Kirschpaar im Logo ein weiteres Erkennungsmerkmal für das Lernmaterial und die Materialisierungen zur Verfügung zu haben. Das Einstellungsmenü erlaubte fortan die Auswahl alternativer Darstellungen der Ziffern 1, 4 und 7, die so an regionale Üblichkeiten angepasst werden können. Dennis Krohn gestaltete für diesen Zweck alle Ziffern neu (Abbildung 7.33).

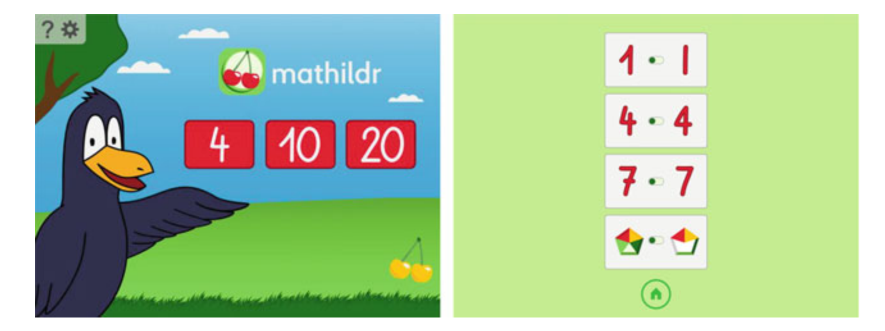


Abbildung 7.33 Hauptmenü und Einstellungsmenü von mathildr 1.2.9

Eine weitere neue Einstellungsmöglichkeit ist der kontrastreichere Farbmodus, der Hintergründe weiß färbt und grafische Details entfernt, die nicht zur Funktionalität der App beitragen.

Das Herzstück der App, das Zehnerfeld, wurde auch in der Standardfarbgebung grafisch überarbeitet. Eine neue Farbgebung des runden Feldes ermöglicht einen stärkeren Kontrast zwischen dem Feldhintergrund und den Kirschen. Die freien Plätze im Zehnerfeld werden nun nicht mehr als Punkte, sondern als Ringe dargestellt (Abbildung 7.34). Auf diese Weise wird aus zweierlei Sicht ihre Bedeutung als 0 besser fassbar. Einerseits ähneln sie in ihrer Form der Ziffer 0, andererseits erinnern sie an ein leeres Gefäß, das durch eine Kirsche gefüllt werden kann. Kirsche und Ring stehen nun deutlicher für 1 und 0. Eine Übersicht der neu gestalteten Mengenbilder findet sich im Anhang auf Seite 12 im elektronischen Zusatzmaterial.

Das Ein- und Ausblenden verschiedener Elemente ist nun in einem aufklappbaren Menü direkt in der Ansicht des Feldes möglich. Dieses öffnet sich

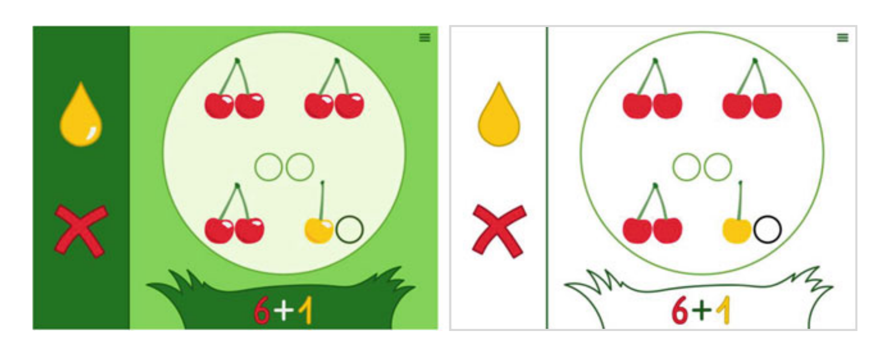


Abbildung 7.34 Die Aufgabe 6 + 1 wird im Zehnerfeld von mathildr 1.2.9 dargestellt. Links: Standardeinstellung, rechts: kontrastreicher Farbmodus

nach Berührung des sog. Hamburger-Icons oben rechts in der Ecke. Dieses Icon wird häufig in mobilen Anwendungen verwendet, um das Öffnen von Menüs zu ermöglichen. Es wird als *Hamburger-Icon* bezeichnet, weil die Linien an zwei Brötchenhälften mit einem Patty in der Mitte erinnern (Campbell-Dollaghan, 2014). Der Farbwechsel-Button, das X und das Term-Element können im Menü durch Berührung aus- und wieder eingeblendet werden (Abbildung 7.35). Eine Berührung des Haus-Icons führt zurück zum Hauptmenü.

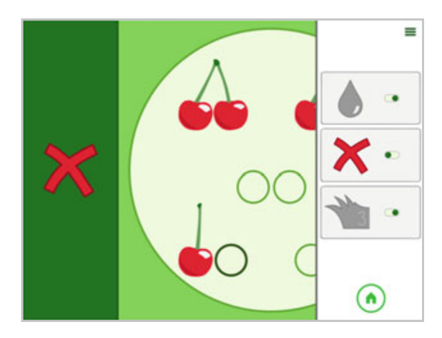


Abbildung 7.35 Zehnerfeld in mathildr 1.2.9. Nach einer Berührung des Hamburger-Icons wird ein Menü geöffnet, mit dessen Hilfe der Farbwechsel-Button und das Term-Element ausgeblendet werden

Um das Menü wieder einzuklappen, wird erneut das Hamburger-Icon oder der Bildschirm außerhalb des Menüs berührt.

7.3.1.2 Erweiterung des Zahlenraums

Aufgrund der Erfahrung, dass die mathildr-App das Zählenlernen unterstützen kann, wurde der App ein Viererfeld hinzugefügt. Dieses Feld entspricht der ersten Zeile des Zehnerfeldes. Lernende können im Zahlenraum 0 bis 4 zählen und sich dabei erstmals mit der Zweierbündelung und der Mechanik der App vertraut machen. Außerdem wurde ein Zwanzigerfeld hinzugefügt, das aus zwei nebeneinanderstehenden Zehnerfeldern besteht und die Darstellung von Mengen von 0 bis 20 sowie Additionsaufgaben mit Zehnerübergang ermöglicht (Abbildung 7.36).

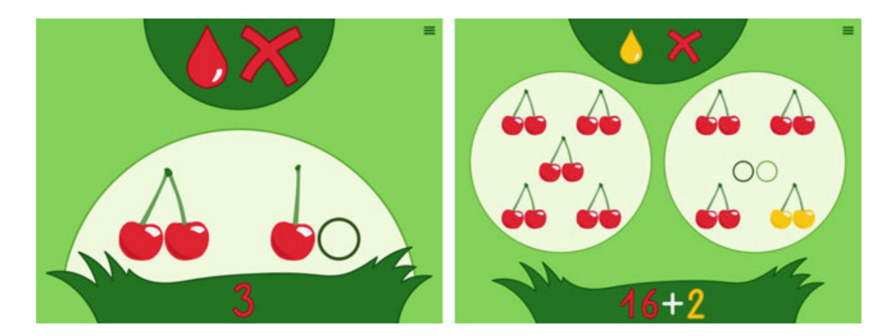


Abbildung 7.36 Vierer- und Zwanzigerfeld in mathildr 1.2.9

Das Vierer- und das Zwanzigerfeld unterstützen alle Funktionen des Zehnerfeldes: Es können Additionsaufgaben dargestellt werden und einzelne Elemente, die zur Bearbeitung bestimmter Aufgaben nicht benötigt werden, können ausgeblendet werden.

7.3.2 Update der Internetseite

Neben allgemeinen Informationen zur mathildr-App wurden auf der Internetseite erstmals auch *Lernideen* vorgestellt. Da sich in der Arbeit mit Noa, Leen und Michel herausstellte, dass es lohnenswert ist, den Unterricht zu individualisieren, um bei den Lernenden einen persönlichen Sinn in der Arbeit mit dem Material zu erzeugen, sollte auf diese Weise dazu angeregt werden, diese spielerischen Aktivitäten mit der App nicht als Aufgabe zu verstehen, sondern als anpassbaren Vorschlag. Zur Arbeit mit dem Viererfeld wurden folgende Vorschläge unterbreitet (Abbildung 7.37).

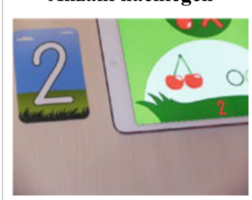
Kirschen zählen 	Zu Beginn sollte das Kind lernen, wie Kirschen in der App gelegt und wieder entfernt werden können. Legen Sie die Kirschen von 1 bis 4 und zählen Sie dabei laut mit. Entfernen Sie alle Kirschen, indem Sie auf das Kreuz tippen. Jetzt ist das Kind an der Reihe. Es soll ebenfalls Kirschen von 1 bis 4 legen und dabei mitzählen.
Zählen 	Suchen Sie gemeinsam nach Dingen, die gezählt werden können. Legen Sie eines bis vier der Objekte auf den Tisch und bitten Sie das Kind, diese mit Hilfe der App zu zählen. Verwenden Sie die Zahlwörter *Eins, Zwei, Drei* und *Vier*.
Anzahl nachlegen 	Benötigt werden Karten mit den Zahlen 0 bis 4. Legen Sie eine der Karten neben das Tablet. Das Kind hat nun die Aufgabe, diese Anzahl in der App nachzulegen. Die angezeigte Zahl im unteren Bereich des Bildschirms sollte dabei zur Kontrolle mit der Zahl auf der Karte verglichen werden.

Abbildung 7.37 Lernideen für die Arbeit mit dem Viererfeld

Die Lernideen zum Zehner- und Zwanzigerfeld umfassten neben ähnlichen Vorschlägen zur Orientierung im entsprechenden Feld und zum Lernen der Mengenbilder Additions- und Subtraktionsaufgaben sowie Spiele zur Kurzzeitdarbietung. Beispielsweise wurde das Spiel erklärt, das bereits während der Entwicklung der Iteration 2 gespielt wurde:

> Blenden Sie den Farbtropfen und die Zahlanzeige (Grasbüschel) aus. Ziehe Sie verdeckt eine Zahlenkarte und legen Sie die entsprechende Anzahl an Kirschen verdeckt in das Zehnerfeld. Zeigen Sie dem Kind für einen kurzen Augenblick das Tablet und fragen Sie, um wie viele Kirschen es sich handelt. Ist die Antwort korrekt, zeigen Sie dem Kind die zuvor verdeckt gezogene Karte. Tauschen Sie nun die Rollen.

7.3.3 Materialisierungen

Die dritte Iteration von mathildr beinhaltet neben dem Update der App zwei Materialisierungen, die in Kombination mit der App, aber auch einzeln verwendet werden können.

7.3.3.1 mathildr-Karten 0–10

Während der Entwicklung und Erprobung der zweiten Iteration wurden bereits Karten, die die Zahlen 0 bis 10 abbilden, und Karten mit den mathildr-Mengenbildern im Rahmen der Mathematikförderung von Noa, Leen und Michel eingesetzt. Diese Erfahrungen sowie Rückmeldungen zur downloadbaren Druckvorlage der Zahlenkarten flossen in die Entwicklung der *mathildr-Karten 0–10*



Abbildung 7.38 Foto der mathildr-Karten 0–10. Die Vorderseite der Pappschachtel ziert den Raben, der aus dem Hauptmenü der App bekannt ist. Karten mit den Werten 4 bis 10 sind nicht im Bild erkennbar, aber ebenfalls vorhanden

ein. Dabei handelt es sich um eine Sammlung aus 33 Karten mit folgendem Inhalt: Zahlenkarten von 0 bis 10, zwei Karten mit dem Mengenbild der 0, Karten mit den Mengenbildern von 1 bis 10 mit roten Kirschen und Karten mit den Mengenbildern von 1 bis 10 mit gelben Kirschen (Abbildung 7.38).

Die Zahlenkarten zeigen weiße Ziffern vor einer Wiese und einem Himmel. Dank dieser Darstellung kann auf einen Unterstrich zur Unterscheidung der 6 und der 9 verzichtet werden. Die Vermeidung unbeabsichtigt verdrehter Karten sollte sich auch beim Erlernen anderer Ziffern positiv bemerkbar machen. Eine um 180° gedrehte 2 erinnert beispielsweise stark an eine horizontal gespiegelte 5 und kann beim Erlernen der Ziffern ebenfalls für Verwechslung sorgen.

Für den Einsatz der Karten in der pädagogischen Arbeit wurden auf der Website von mathildr verschiedene Lernideen formuliert, die auf gleiche Weise umgesetzt oder als Vorbild für eigene Übungsformate eingesetzt werden können (Abbildung 7.39).

7.3.3.2 mathildr-Würfel XL

Das Einprägen der Mengenbilder erwies sich in der pädagogischen Arbeit mit mathildr als essenziell. Um neben der Arbeit mit der App und den Karten eine weitere Möglichkeit zu schaffen, sich die Mengenbilder einzuprägen, wurden Holzwürfel mit Mengenbildern entwickelt. Diese lassen sich in Kombination mit der App, aber auch eigenständig verwenden. Insbesondere der Einsatz in Würfelspielen bietet sich an. Es handelt sich um zwei Holzwürfel mit einer Seitenlänge von 5 cm. Ein Würfel zeigt die Mengen 0, 1, 3, 5, 7 und 9, der andere 0, 2, 4, 6, 8 und 10 (Abbildung 7.40).

Die Würfel wurden nach den Vorstellungen des Autors durch Sabine Weiskopf umgesetzt. Auf der Internetseite von mathildr wurden Lernideen zur Arbeit mit den Würfeln veröffentlicht (Abbildung 7.41).

Diese Lernideen eignen sich auch für selbst hergestellte Würfel. Abbildung 7.42 zeigt zwei Würfel in Standardgröße, die händisch mit den mathildr-Mengenbildern bemalt wurden.

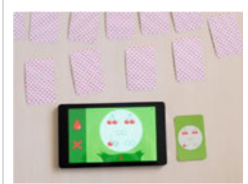
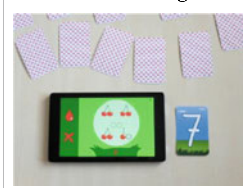
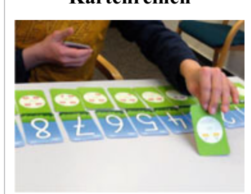
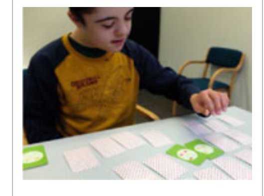
Mengenbild nachlegen 	Benötigt werden Karten, die die Mengenbilder 0 bis 10 zeigen. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Abwechselnd wird eine Karte gezogen. Das Mengenbild auf der gezogenen Karte wird in der App nachgelegt. Erst wird gesagt, um welche Zahl es sich handelt, danach, wie das Mengenbild aussieht: Für jedes gelegte Kirschpaar wird *Paar* gesagt, für jede gelegte Kirsche *Kirsche*. Die 5 wird demnach als *Paar, Paar, Kirsche* bezeichnet.
Anzahl nachlegen 	Diese Idee entspricht der Idee „Mengenbild nachlegen“. Allerdings werden Zahlenkarten mit den Zahlen 0 bis 10 verwendet. Auch diese Handlung sollte sprachlich durch *Paar* und *Kirsche* begleitet werden.
Mengenkarten zuordnen 	Für diese Idee werden die mathildr-Karten 0–10 benötigt. Alle roten Mengenkarten liegen von 0 bis 10 geordnet auf dem Tisch. Das Kind hat die Aufgabe, unsortierte gelbe Mengenbilder zuzuordnen.
Kartenreihen 	Mischen Sie die Zahlenkarten und legen Sie diese offen auf den Tisch. Fordern Sie das Kind dazu auf, die Karten in die richtige Reihenfolge zu bringen. Im nächsten Schritt sollen die gemischten Mengenkarten mit roten Kirschen zugeordnet werden. Zuletzt werden die Mengenkarten mit gelben Kirschen zugeordnet.
Memospiel 	Die roten und gelben Mengenkarten liegen gemischt und verdeckt auf dem Tisch. Nach den Regeln eines Memospiels sollen Paare gefunden werden. Variieren Sie das Spiel, indem Sie statt der gelben Mengenkarten die Zahlenkarten verwenden.

Abbildung 7.39 Lernideen für die Arbeit mit den mathildr-Karten 0–10 oder selbst hergestellten Zahlen- und Mengenkarten




Abbildung 7.40
mathildr-Würfel XL

7.3.4 Erprobung

Die Erprobung der zweiten Iteration des Lernmaterials mit Hilfe von drei Schüler*innen und der zuvor aufgestellten Kriterien zur Entwicklung des Lernmaterials führten zu den Änderungen der dritten Iteration. Da die meisten Kriterien mit dieser Änderung erfüllt sind und Noa, Leen und Michel bereits Lernfortschritte am Material zeigten, sollte daraufhin der Frage nachgegangen werden, ob auch andere Lernende mit Simultandysgnosie mit Hilfe von mathildr Lernfortschritte erzielen können. Hierzu sollte nicht nur die Stichprobengröße deutlich erhöht, sondern auch ein einheitliches System zur Darstellung des Lernfortschrittes gefunden werden.

Bewusst wurde von der Entwicklung einer künstlichen pädagogischen Intervention Abstand genommen, die durch standardisierte Pre- und Post-Tests Lernfortschritte dokumentiert hätte. Die Aussagekraft der Ergebnisse wäre bei einer Stichprobengröße, die im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit möglich gewesen wäre, stark limitiert.

Hätten die Untersuchungspersonen im Post-Test besser abgeschnitten als im Pretest, wäre damit nicht die Wirksamkeit des Lernmaterials belegt. Es würde nicht dokumentieren, dass die jeweiligen Untersuchungspersonen *aufgrund* des Einsatzes des Lernmaterials Fortschritte in der mathematischen Entwicklung erzielen, sondern *trotz* des Einsatzes des Materials. Aus diesem Grund wurde stattdessen ein Vorgehen gewählt, bei dem die Lernfortschritte der Untersuchungspersonen anhand des Lernmaterials dokumentiert werden.

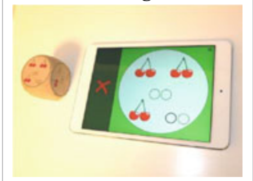
Mengenbild würfeln und nachlegen 	Lassen Sie das Kind einen Würfel aus dem Jutebeutel ziehen und würfeln. Das Mengenbild, das der Würfel zeigt, wird nun in der App nachgelegt. Erst wird gesagt, um welche Zahl es sich handelt, danach, wie das Mengenbild aussieht: Für jedes gelegte Kirschpaar wird *Paar* gesagt, für jede gelegte Kirsche *Kirsche*.
Mensch ärgere Dich nicht 	Spielen Sie „Mensch ärgere Dich nicht“ und verwenden Sie dabei einen der mathildr-Würfel. Vereinbaren Sie, dass nicht bei der 6, sondern bei der 0 eine Spielfigur auf die Startposition gestellt werden darf. Nach dem Würfeln einer 0 darf außerdem noch einmal gewürfelt werden.
Wer würfelt weniger? 	Zwei Personen würfeln jeweils mit einem der mathildr-Würfel. Die Person, die die kleinere Menge würfelt, erhält einen Punkt. Wer zuerst zehn Punkte erhalten hat, gewinnt.
Plusaufgabe würfeln 	Für diese Lernidee werden die mathildr-Würfel XL benötigt. Das Kind würfelt beide Würfel und bildet daraus eine Plusaufgabe. Diese wird mithilfe der App oder im Kopf gerechnet.

Abbildung 7.41 Lernideen zu den mathildr-Würfeln

7.3.4.1 Stichprobe

Die Stichprobe bilden 30 Lernende (elf weiblich, 19 männlich) mit Simultandysgnosie, davon 24 Schüler*innen mit Trisomie 21 und sechs, denen der Förderschwerpunkt *geistige Entwicklung* diagnostiziert worden ist und bei



Abbildung 7.42 Kleine mathildr-Würfel. Urheberin: Susanne Lipps

denen eine Simultandysgnosie festgestellt wurde. Die Stichprobe entspringt zwei grundsätzlichen Quellen: Der Autor setzte das Lernmaterial im Rahmen seiner entwicklungstherapeutischen Arbeit an der Beratungsstelle der Universität Hamburg sowie einer Hamburger Kinder- und Jugendpsychiatrischen Praxis ein. Mit dem Ziel der Begleitung und Förderung der kognitiven Entwicklung fanden in der Regel zweimal monatlich 45-minütige Einheiten statt, in denen spielerisch u. a. die (Schrift-)Sprache und Mathematik individuell abgestimmt thematisiert wurden. Darüber hinaus beriet der Autor Lehrkräfte der Schüler*innen aus der Entwicklungstherapie zum Einsatz des Lernmaterials in ihrem Unterricht. Ob und in welchem Umfang das Lernmaterial in der Schule eingesetzt wurde oder ob Eltern mit ihren Kindern zuhause am Material übten, variierte stark.

Weitere Untersuchungspersonen der Stichprobe sind auf Arbeiten von Studierenden zurückzuführen, die im Projektstudium gemeinsam mit Schüler*innen mit dem Lernmaterial arbeiteten und eine Dokumentation der Lernfortschritte im Rahmen ihrer Masterarbeiten vornahmen (Boll, 2017; Buschfeld, 2017; Grüttner, 2019; Held, 2020; Mohr, 2019; Nehls, 2017; Nimz, 2018; Rawohl, 2019; Röhrs, 2019). Für diese Stichprobe wurden aus den Arbeiten ausschließlich Daten von Lernenden mit Trisomie 21 entnommen, die mithilfe eines Kompetenzrasters aufgezeichnet wurden und ein gleiches oder übertragbares Format wie in Unterkapitel 7.3.4.2.1 dargestellt aufweisen.

Lediglich zwei Voraussetzungen mussten erfüllt sein, um Teil der Stichprobe zu werden:

1. Die Untersuchungsperson lebt unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie.
2. Die Untersuchungsperson erhält mindestens vier Wochen im regelmäßigen Rhythmus einen Unterricht, in dem mathildr verwendet wird.

Aus diesem Grund ist die Stichprobe sehr heterogen: Der Lernzeitraum, die Ausgangsvoraussetzungen, die Lernumgebung, die Häufigkeit des Unterrichts und das Alter variieren. Die Lernfortschritte von 30 Untersuchungspersonen im Alter von vier bis 15 Jahren (Durchschnittsalter 10;9 Jahre) wurden in einem Lernzeitraum von einem bis sechs Monaten, durchschnittlich 14 Wochen, beobachtet.

7.3.4.2 Methodik

Die Heterogenität der Stichprobe erlaubt keinen Vergleich der Untersuchungspersonen. Stattdessen wurde die Entscheidung getroffen, die Fähigkeiten der Untersuchungspersonen an zwei Messzeitpunkten, zu Beginn und zum Ende des beobachteten Zeitraums, zu vergleichen. So können etwaige Lernzuwächse für jede Person individuell bestimmt werden.

Da ein standardisierter Test keine Rückschlüsse darauf zulässt, ob eine Untersuchungsperson ein bestimmtes Wissen oder bestimmte Fähigkeiten aufgrund des Unterrichts mit mathildr erlangt hat, wird der Umgang mit dem Lernmaterial selbst beobachtet. Gelingen einer Untersuchungsperson zum zweiten Messzeitpunkt Handlungen mit dem Lernmaterial, die beim ersten Messzeitpunkt noch nicht möglich waren, kann von einem Lernzuwachs ausgegangen werden, der wahrscheinlich auf die Arbeit mit dem Material zurückzuführen ist. Lassen sich zum zweiten Messzeitpunkt keine Fähigkeiten erkennen, die beim ersten Messzeitpunkt nicht zu beobachten waren, kann indes kein Lernzuwachs belegt werden.

Es stellte sich die Frage, auf welche Weise die Messung dieser Fähigkeiten konkret erfolgen sollte. An Regelschulen wird Leistungszuwachs fast ausschließlich durch Notengebung bewertet, obgleich Alternativen vorhanden sind (Osburg & Schütt, 2015, S. 139). Osburg (1998, S. 195) plädiert stattdessen für eine Orientierung an den Fähigkeiten der Schüler*innen, die durch die Analyse des konkreten Unterrichts verwirklicht wird. Laut Ziemen sollte sich die Bewertung „an der individuellen Bezugsnorm orientieren, an der Entwicklung, den Potenzialen und Möglichkeiten des Einzelnen" (2018, S. 170). In der Vergangenheit wurde insbesondere Behinderung mit Defiziten und Inkompetenzen verknüpft, eine Orientierung an den Kompetenzen der Schüler*innen erfolgte erst mit Ablehnung des dominanten medizinisch tradierten Denkens (Ziemen, 2017b, S. 151). Der Begriff „Kompetenz" wird „mit Fähigkeit bzw. Können, Befugnis und Zuständigkeit übersetzt. Sie ist keine individuelle Eigenschaft, sondern ein Bewertungskonstrukt" (ebd.). Als solches kann sie im Unterricht zur transparenten Einschätzung des Lernzuwachses verwendet werden. Durch Beobachtungen oder Selbsteinschätzung der Schüler*innen können Kompetenzraster

erstellt werden, die unterschiedliche Kompetenzbereiche umfassen, die im Rahmen eines Unterrichtsgenstandes erworben werden können. Neben einfachen „Ich kann“-Formulierungen kann die Formulierung „Ich kann mit Unterstützung“ dazu beitragen, auch die Zone der nächsten Entwicklung abzubilden (Ziemen, 2018, S. 171 f.). Zimpel (2012b, S. 187) empfiehlt, eine Abstufung im Kompetenzraster vorzunehmen, die er als „Grundstruktur menschlichen Lernens“ bezeichnet (Abbildung 7.43).

Abbildung 7.43 Kompetenzraster nach Zimpel (2012b, S. 187)

Ich habe Interesse an …
Ich kann mithilfe …
Ich kann allein …
Ich kann anderen helfen beim …
Ich kann mir selbst helfen beim …

Die Berücksichtigung des Interesses hat sich laut Zimpel besonders bei Lernenden, die unter den Bedingungen einer Schwerstbehinderung leben, als bedeutend erwiesen (ebd.). Auch basales Lernen kann auf diese Weise abgebildet und reflektiert werden.

Weiterhin ist das Helfen als wesentlicher Aspekt in Zimpels Kompetenzraster zu finden. Das Helfen anderer ist besonders für Schüler*innen bedeutend, die sich aufgrund einer Behinderung meistens als Hilfeempfangende wahrnehmen. Sich selbst als helfende Person wahrzunehmen, befördert außerdem den Abruf des Gelernten besser als negative Erinnerungen (ebd., S. 156). Letztlich sollen Schüler*innen dazu befähigt werden, neben anderen auch sich selbst zu helfen und unbekannte, schwierigere Aufgaben mithilfe ihrer bereits erworbenen Kompetenzen eigenständig zu lösen. Zimpel bezieht sich hierbei auf das zentrale Motto der Montessori-Pädagogik „Hilf mir, es selbst zu tun!“ (ebd., S. 42 f.). Dieser Punkt bildet die höchste Stufe in der Grundstruktur menschlichen Lernens.

7.3.4.2.1 Kompetenzraster

In der Arbeit mit den bisherigen Iterationen von mathildr haben sich drei Kompetenzbereiche herauskristallisiert, die mithilfe des Materials sinnbringend bearbeitet werden können: das Zählen, das quasi-simultane Erfassen und das Addieren. Mit dem Ziel, den Lernfortschritt in der Arbeit mit dem Lernmaterial zu dokumentieren, wurde ein Kompetenzraster erstellt, das das Kompetenzraster Zimpels mit den möglichen Aktivitäten am Lernmaterial verknüpft:

Dieses Kompetenzraster wurde zur Beobachtung des Lernfortschrittes aller Schüler*innen verwendet, unabhängig von dem Zahlenraum, in dem sie arbeiteten. Wenn sie im Zahlenraum 4 gearbeitet haben, wurde die Spalte *Addieren* ausgelassen, da die Darstellung einer Addition im Viererfeld als sehr kleinschrittig und pädagogisch nicht sinnvoll erscheint. Stattdessen empfiehlt es sich, möglichst früh vom Vierer- zum Zehnerfeld zu wechseln.

Nach jeder Unterrichtseinheit wurden die Kompetenzraster von der Lehrperson ausgefüllt. Mindestens sollte ein Kreuz gesetzt werden, wenn eine Stufe erreicht worden ist, häufig wurden aber auch Beobachtungen, die diese Stufenwahl begründeten, verschriftlicht. Ob eine bestimmte Stufe in einem bestimmten Kompetenzbereich erreicht wurde, ist von zuvor festgelegten Kriterien abhängig. Tabelle 7.1 und 7.2 enthält die Kriterien im Kompetenzbereich *Zählen*. Die Beispiele wurden aus Sicht der Lehrperson formuliert, der/die Schüler*in wird als Untersuchungsperson bezeichnet (Tabelle 7.3 und 7.4).

Tabelle 7.1 Kompetenzraster zur Eintragung von Beobachtungen, die Rückschlüsse auf Kompetenzen einzelner Schüler*innen ermöglichen

		Zählen	quasi-simultanes Erfassen	Addieren
0	kein Interesse			
1	Interesse			
2	mit Hilfe			
3	allein			
4	kann anderen helfen			
5	kann sich selbst helfen			

Die Stufe 3 im Kompetenzbereich *Zählen* gilt erst dann als erreicht, wenn die Untersuchungsperson alle Anzahlen, die in dem Feld, in dem gearbeitet wird, fehlerfrei nachzählen kann. Um zu überprüfen, ob bereits die Stufe 4 erreicht ist, wurden im Unterricht Situationen geschaffen, die die Lernenden dazu animieren, die Lehrperson zu korrigieren oder anderen zu helfen. Da die Lernenden selbständig mit dem Lernmaterial arbeiteten, konnten sie jederzeit zwischen den verschiedenen Feldern wechseln. Beobachtungen, die die Stufe 5 betreffen, waren daher möglich. Die Stufe 5 kann formal bei der Arbeit mit dem Zwanzigerfeld nicht erreicht werden, weil mathildr bisher kein nächstgrößeres Feld beinhaltet.

Die Kriterien im Kompetenzbereich der quasi-simultanen Erfassung gestalten sich analog zum Kompetenzbereich *Zählen*. Ziel war es hier, Mengen, ohne nachzuzählen, spontan korrekt zu benennen.

Tabelle 7.2 Kriterien und Beispiele zur Erreichung von Stufen im Kompetenzbereich Zählen

		Kompetenzbereich Zählen	Beispiel
0	kein Interesse	Die Untersuchungsperson zeigt kein Interesse, wenn jemand innerhalb der mathildr-App zählt.	Ich zähle in der mathildr-App Kirschen nach. Die Untersuchungsperson reagiert nicht darauf.
1	Interesse	Die Untersuchungsperson zeigt Interesse, wenn jemand innerhalb der mathildr-App zählt.	Ich zähle in der mathildr-App Kirschen nach. Die Untersuchungsperson schenkt mir für einen Moment Aufmerksamkeit.
2	mit Hilfe	Die Untersuchungsperson zählt mit Hilfe von jemand anderem in der mathildr-App.	Die Untersuchungsperson zählt in der App Kirschen nach. Sie kommt mit der Zahlwortfolge durcheinander, weshalb ich sie ab *drei* unterstütze.
3	allein	Die Untersuchungsperson zählt komplett und korrekt im Zehnerfeld (bzw. Viererfeld oder Zwanzigerfeld).	Ich muss die Untersuchungsperson nicht unterstützen, während sie korrekt die Kirschen nachzählt und benennt.
4	kann anderen helfen	Die Untersuchungsperson unterstützt eine andere Person beim korrekten Nachzählen der Kirschen.	In der App sind fünf Kirschen zu sehen. Ich behaupte: „Dort sind drei Kirschen zu sehen!“. Die Untersuchungsperson zählt nach und korrigiert mich: „Nein, das sind fünf Kirschen!“.
5	kann sich selbst helfen	Die Untersuchungsperson erschließt sich das Zählen im nächstgrößeren Feld selbst.	Bisher haben wir nur mit dem Zehnerfeld gearbeitet. Die Untersuchungsperson zählt im Zwanzigerfeld die Anzahl von 14 Kirschen korrekt nach.

Tabelle 7.3 Kriterien und Beispiele zur Erreichung von Stufen im Kompetenzbereich quasi-simultane Erfassung

		Kompetenzbereich quasi-simultane Erfassung	Beispiel
0	kein Interesse	Die Untersuchungsperson zeigt kein Interesse für die Mengenbilder.	Ich sehe mir das Mengenbild der 10 in der mathildr-App an. Die Untersuchungsperson sieht weg und sucht sich ein Spielzeug.
1	Interesse	Die Untersuchungsperson zeigt Interesse an den Mengenbildern.	Ich sehe mir das Mengenbild der 10 in der mathildr-App an. Die Untersuchungsperson schenkt mir für einen Moment Aufmerksamkeit.
2	mit Hilfe	Die Untersuchungsperson benennt nicht alle Mengenbilder korrekt und muss sie teilweise nachzählen.	Die Untersuchungsperson sieht das Mengenbild der 7 und sagt „Fünf!". Ich bitte sie darum, noch einmal nachzuzählen. Sie zählt und korrigiert sich: „Sieben!".
3	allein	Die Untersuchungsperson ist in der Lage, jedes Mengenbild ad hoc zu benennen.	Eine Karte mit dem Mengenbild der 7 wird gezeigt. Die Untersuchungsperson sagt sofort: „Sieben!". Dies gelingt ihr auch bei allen anderen Mengenbildern im Zahlenbereich.
4	kann anderen helfen	Die Untersuchungsperson unterstützt eine andere Person beim Benennen der Mengenbilder.	Ich zeige der Untersuchungsperson das Mengenbild der 4 und sage: „Hier haben wir zwei Kirschen.". Sie korrigiert mich und sagt: „Nein, das sind vier!".
5	kann sich selbst helfen	Die Untersuchungsperson erkennt auch Mengenbilder aus dem nächstgrößeren Feld auf einen Blick.	Wir arbeiten das erste Mal mit dem Zwanzigerfeld. Die Untersuchungsperson sieht das Mengenbild der 14 und sagt nach kurzem Überlegen: „Das sind 14 Kirschen!".

Tabelle 7.4 Kriterien und Beispiele zur Erreichung von Stufen im Kompetenzbereich Addieren

		Kompetenzbereich Addieren	Beispiel
0	kein Interesse	Die Untersuchungsperson zeigt kein Interesse für die Addition.	Ich lege eine Additionsaufgabe in der App. Die Untersuchungsperson steht vom Tisch auf, an dem wir arbeiten.
1	Interesse	Die Untersuchungsperson zeigt Interesse an der Addition.	Ich lege eine Additionsaufgabe in der App. Die Untersuchungsperson schenkt mir für einen Moment Aufmerksamkeit.
2	mit Hilfe	Die Untersuchungsperson rechnet Additionsaufgaben in der App mit Hilfe einer anderen Person.	Auf einem Zettel steht die Aufgabe „4 + 2 = “. Die Untersuchungsperson gibt die Aufgabe in die App ein. Hierbei benötigt sie noch Hilfe. Sie schreibt das Ergebnis *6* auf.
3	allein	Die Untersuchungsperson rechnet Additionsaufgaben in der App.	Auf einem Zettel steht die Aufgabe „4 + 2 = “. Die Untersuchungsperson gibt die Aufgabe selbständig in die App ein. Sie erkennt das Ergebnis *6* und schreibt es auf.
4	kann anderen helfen	Die Untersuchungsperson unterstützt eine andere Person beim Addieren in der App.	Auf einem Zettel steht die Aufgabe „4 + 2 = “. Ich gebe in die App „5 + 2“ ein. Die Untersuchungsperson zeigt mir, wie die Aufgabe korrekt eingegeben wird.

(Fortsetzung)

Tabelle 7.4 (Fortsetzung)

		Kompetenzbereich Addieren	Beispiel
5	kann sich selbst helfen	Die Untersuchungsperson rechnet im nächstgrößeren Feld.	Auf einem Zettel steht die Aufgabe „8 + 4 = “. Die Untersuchungsperson gibt diese Aufgabe in das Zwanzigerfeld der App ein und sagt „Das sind 12!“.

Für die Reflexion des eigentlichen Unterrichts kann das Kompetenzraster noch weiter differenziert werden. In den Masterarbeiten der Studierenden wurde beispielsweise präzise aufgezeichnet, welche Mengenbilder bereits ad hoc erkannt werden können und welche noch nachgezählt werden müssen. In der Gesamtauswertung dieser Erprobung gilt der Punkt 3 allerdings nur dann als erfüllt, wenn alle Mengenbilder des Zahlenraums quasi-simultan erfasst werden, also nach sehr kurzer Darbietungszeit korrekt benannt werden können.

Der Kompetenzbereich *Addieren* zielt darauf ab, dass mit Hilfe der App Additionsaufgaben in den Zahlenräumen 10 oder 20 routiniert durchgeführt werden können.

Um die Stufe 3 zu erreichen, war es nicht notwendig, sämtliche Additionsaufgaben im entsprechenden Zahlenraum mit natürlichen Zahlen durchzuführen. Von Bedeutung war vielmehr, dass die Lehrperson den Eindruck gewann, dass beliebige Aufgaben fehlerfrei bearbeitet werden können.

7.3.4.3 Ergebnisse

Das erste Kompetenzraster jeder Untersuchungsperson wurde mit ihrem letzten Kompetenzraster des Beobachtungszeitraums verglichen. Tabelle 7.5 zeigt die Ergebnisse in der Übersicht.

Zahlenraum 4

Mit vier Untersuchungspersonen wurde im Zahlenraum 4 gearbeitet. Drei Schüler*innen erreichten zum Ende des Unterrichts eine höhere Stufe im Kompetenzbereich *Zählen*. Die Untersuchungsperson S4 (15 Jahre alt) hatte beispielsweise zu Beginn kein Interesse am Zählen mit der App, zählte aber nach 17 Wochen regelmäßigen Unterrichts alleine die Mengen von 1 bis 4 Kirschen nach und erreichte damit die Stufe 3. Die drei weiteren Untersuchungspersonen befanden

Tabelle 7.5 Zusammenfassung der Ergebnisse sämtlicher Erprobungen der dritten Iteration des Lernmaterials. Angegeben ist das Alter sämtlicher Untersuchungspersonen zu Beginn des Unterrichts mit mathildr

Untersuchungsperson	Zahlenraum	Alter	Unterricht in Wochen	Kompetenzstufe								
				Zählen			quasi-simultanes Erfassen			Addieren		
				Beginn	Ende	Veränderung	Beginn	Ende	Veränderung	Beginn	Ende	Veränderung
S1	4	4	9	2	2	0	1	2	1			
S2	4	14	17	1	3	2	0	0	0			
S3	4	14	23	1	3	2	1	2	1			
S4	4	15	17	0	3	3	0	2	2			
S5	10	6	13	2	2	0	1	2	1	0	0	0
S6	10	6	20	3	5	2	2	5	3	2	4	2
S7	10	7	6	4	4	0	4	4	0	1	3	2
S8	10	7	11	2	3	1	1	2	1	0	0	0
S9	10	7	22	2	3	1	2	3	1	1	1	0
S10	10	8	4	1	2	1	1	2	1	0	0	0
S11	10	8	6	2	3	1	1	2	1	1	2	1
S12	10	8	9	2	2	0	1	1	0	0	0	0
S13	10	9	6	4	4	0	2	2	0	1	2	1
S14	10	10	6	3	4	1	2	3	1	1	3	2
S15	10	10	15	4	4	0	3	4	1	1	3	2
S16	10	10	18	3	3	0	1	2	1	0	1	1

(Fortsetzung)

Tabelle 7.5 (Fortsetzung)

Untersuchungsperson	Zahlenraum	Alter	Unterricht in Wochen	Kompetenzstufe								
				Zählen			quasi-simultanes Erfassen			Addieren		
				Beginn	Ende	Veränderung	Beginn	Ende	Veränderung	Beginn	Ende	Veränderung
S17	10	10	18	4	5	1	2	4	2	1	3	2
S18	10	10	23	4	4	0	2	3	1	2	3	1
S19	10	11	7	3	5	2	2	5	3	1	5	4
S20	10	11	16	4	4	0	2	3	1	2	3	1
S21	10	12	9	3	3	0	1	3	2	0	0	0
S22	10	15	13	0	3	3	1	3	2	0	0	0
S23	10	15	14	2	4	2	1	4	3	1	3	2
S24	10	15	17	3	3	0	2	3	1	0	0	0
S25	10	15	23	1	2	1	1	2	1	0	2	2
S26	10	16	22	2	3	1	2	2	0	1	2	1
S27	10	17	14	3	4	1	2	4	2	2	3	1
S28	20	9	18	3	4	1	2	4	2	2	3	1
S29	20	11	18	3	3	0	2	3	1	2	3	1
S30	20	12	15	3	4	1	2	4	2	2	3	1

sich zum Zeitpunkt der zweiten Messung auf Stufe 2 in diesem Kompetenzbereich. Im Kompetenzbereich des quasi-simultanen Erfassens erreichten drei Schüler*innen eine höhere Stufe als zuvor. Stufe 1 wurde von zwei von ihnen erreicht, Stufe 2 von einer Person.

Zahlenraum 10

Im Zahlenraum 10 wurde mit 23 Untersuchungspersonen gearbeitet. In Abbildung 7.44 sind die Beobachtungsergebnisse im Kompetenzbereich *Zählen* zusammengefasst. Im Balkendiagramm werden die absoluten Zahlen der erreichten Stufen wiedergegeben, wobei zwischen den Werten im ersten Kompetenzraster und jenen im letzten Kompetenzraster unterschieden wird.

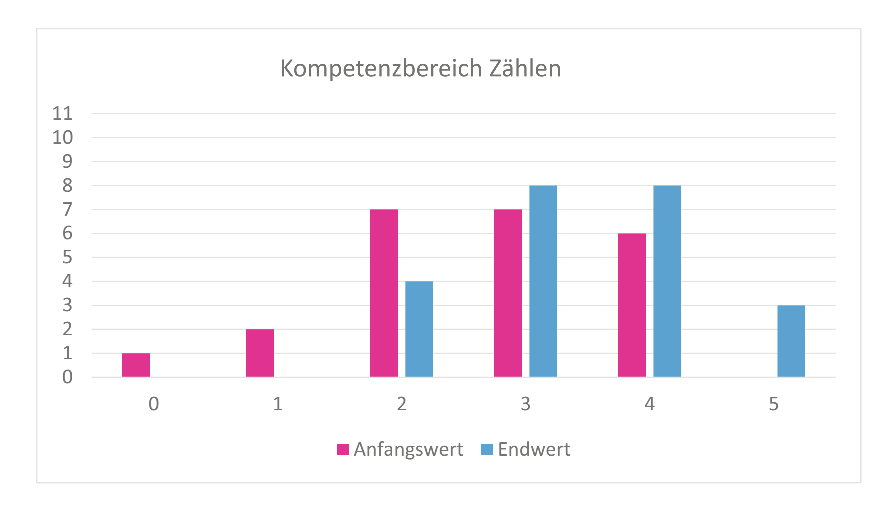


Abbildung 7.44 Zusammenfassung der Beobachtungsergebnisse im Kompetenzbereich Zählen. Abszisse: Erreichte Kompetenzstufe. Ordinate: Absolute Anzahl an Untersuchungspersonen. n = 23

Während in den ersten Kompetenzrastern in Einzelfällen die Stufen 0 und 1 markiert wurden, ist dies in den letzten Kompetenzrastern nicht mehr der Fall. Hier wurde außerdem die Stufe 2 weniger markiert, dafür ist ein Zuwachs von 1 bei Stufe 3 und 2 bei Stufe 4 ersichtlich. Drei Untersuchungspersonen erreichten Stufe 5. Insgesamt erreichten 13 der 23 Untersuchungspersonen, die in diesem Zahlenraum gearbeitet hatten, eine höhere Stufe.

Im Kompetenzbereich des quasi-simultanen Erfassens dominierten in den ersten Kompetenzrastern die Stufen 1 und 2. Am Ende der Beobachtungsphase erreichten acht Untersuchungspersonen Stufe 2. 14 Untersuchungspersonen konnten alle Mengenbilder ohne Hilfe und ohne zu zählen ad hoc benennen. Fünf von ihnen konnten andere dabei unterstützen, die Mengenbilder zu erkennen, zwei konnten ihre Kompetenz anwenden, um sich selbständig die Mengenbilder im Zwanzigerfeld zu erschließen (Abbildung 7.45).

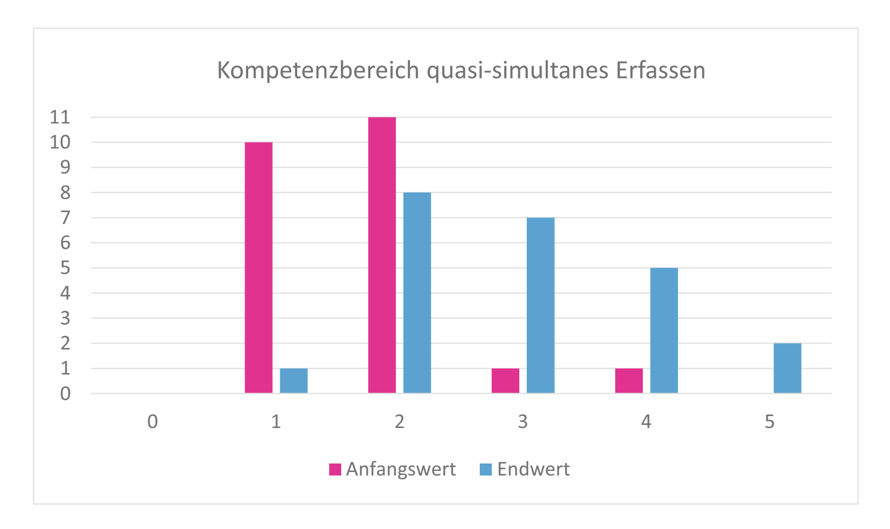


Abbildung 7.45 Zusammenfassung der Beobachtungsergebnisse im Kompetenzbereich quasi-simultanes Erfassen. Abszisse: Erreichte Kompetenzstufe. Ordinate: Absolute Anzahl an Untersuchungspersonen. $n = 23$

Von den 23 Untersuchungspersonen erreichten 19 zum Ende des Beobachtungszeitraums in diesem Kompetenzbereich eine höhere Stufe.

Im Kompetenzbereich *Addieren* wurden zu Beginn des Untersuchungszeitraums lediglich die Stufen 0 bis 2 markiert. Am Ende des Untersuchungszeitraums gelang es zehn Untersuchungspersonen, selbständig mit der App zu rechnen. Eine Person konnte anderen dabei helfen, eine weitere erreichte sogar Stufe 5, indem sie sich die Addition im Zwanzigerfeld selbständig aneignete (Abbildung 7.46).

15 Untersuchungspersonen, die im Zehnerraum mit mathildr arbeiteten, erreichten während des Beobachtungszeitraums im Kompetenzbereich *Addieren* eine höhere Stufe.

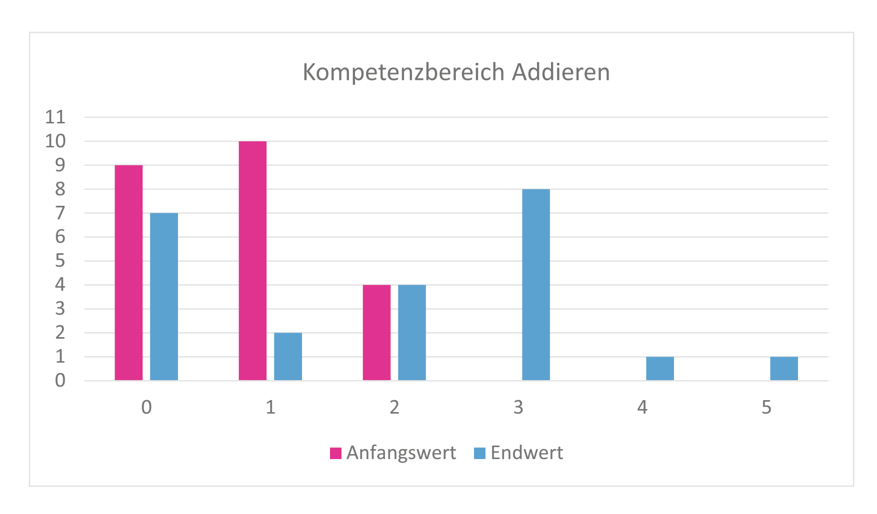


Abbildung 7.46 Zusammenfassung der Beobachtungsergebnisse im Kompetenzbereich Addieren. X-Achse: Erreichte Kompetenzstufe. Y-Achse: Absolute Anzahl an Untersuchungspersonen. n = 23

Zahlenraum 20

Im Zahlenraum 20 arbeiteten drei Untersuchungspersonen, die allesamt bereits zuvor mit mathildr im Zehnerraum gearbeitet hatten. Im ersten Kompetenzraster erreichten sie im Kompetenzbereich *Zählen* bereits Stufe 3. Zum Ende des Beobachtungszeitraums erreichten zwei von ihnen Stufe 4. Im Kompetenzbereich *quasi-simultanes Erfassen* erreichten alle zu Beginn Stufe 2. Nach dem Beobachtungszeitraum erreichte eine Person Stufe 3, die anderen beiden Stufe 4. Im Kompetenzbereich *Addieren* rückten alle Untersuchungspersonen von Stufe 2 auf Stufe 3.

Gesamtauswertung

Aufgrund der Heterogenität der Daten wurde von einer deskriptiven Datenanalyse abgesehen. Stattdessen soll lediglich die Frage beantwortet werden, wie viele Untersuchungspersonen mit Hilfe des Lernmaterials Lernfortschritte in den ausgewählten Kompetenzbereichen erzielen konnten (Abbildung 7.47).

Im Bereich *Zählen* haben 18 der 30 Untersuchungspersonen im letzten Kompetenzraster einen höheren Wert erreicht als im ersten. Im Bereich *quasi-simultanes Erfassen* konnten 25 der Untersuchungspersonen ihre Kompetenz

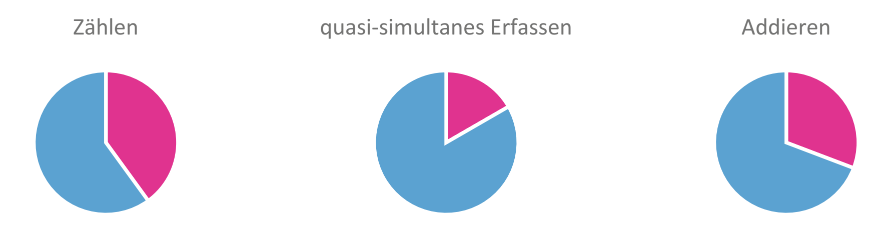


Abbildung 7.47 Blau: Relativer Anteil der Untersuchungspersonen, die sich in einem Kompetenzbereich während des Beobachtungszeitraums verbesserten. Magenta: Relativer Anteil der Untersuchungspersonen, die im Beobachtungszeitraum auf der gleichen Kompetenzstufe verblieben. n (Zählen; quasi-simultanes Erfassen) = 30, n (Addieren) = 26

erweitern. Im Bereich *Addieren* wurde bei 18 von 26 Untersuchungspersonen eine positive Entwicklung beobachtet.

Bis auf Untersuchungsperson S12 erzielten alle Untersuchungspersonen in mindestens einem Kompetenzbereich einen Lernzuwachs. Doch auch die Schülerin S12 entwickelte sich in den neun Wochen Unterricht weiter: Vor dem Unterricht zählte sie Mengen bis 3 korrekt. Am Ende des Beobachtungszeitraums zählte sie Mengen bis 7 korrekt nach. Da im Unterricht mit ihr im Zehnerfeld gearbeitet wurde und sie nicht bis 10 zählte, verblieb sie im Bereich *Zählen* formal auf Stufe 2 – obwohl sie einen eindeutigen Lernerfolg zu verzeichnen hat.

Die Ergebnisse zeigen, dass eine im Vergleich zu den vorherigen Iterationen erheblich größere Stichprobe von 30 Schüler*innen Lernfortschritte mit der dritten Iteration des Lernmaterials erzielen konnte.

7.3.5 Umsetzung der Kriterien

Erneut wurde die Umsetzung der zuvor aufgestellten Kriterien (vgl. Anhang, S. 5 im elektronischen Zusatzmaterial) überprüft. Im Vergleich zur zweiten Iteration eignete sich die App nun für den Einsatz auf dem interaktiven Whiteboard. Im Standard-Farbmodus wurde der Kontrast zwischen den verschiedenen Elementen verstärkt. Darüber hinaus konnte nun ein kontrastreicher Farbmodus ausgewählt werden, der den App-Inhalt auch bei schlechteren Lichtverhältnissen auf Projektionen erkennen ließ. Weiterhin ließen sich Subtraktionsaufgaben nicht in einem Bild darstellen. Eine Fehlerkontrolle, ob Subtraktionen korrekt durchgeführt wurden, war daher noch nicht möglich.

Aufgrund der fehlenden Darstellung von Subtraktionsaufgaben gilt das Kriterium *Angebot wesentlicher Operationen* als nicht erfüllt.

Mit dem Hinzufügen des Zwanzigerfeldes wurde das quasi-simultane Erfassen der Mengen 11 bis 20 möglich. Weiterhin besteht keine Evidenz darüber, dass sich das mathildr-System zur Entwicklung mentaler Bilder eignet.

7.4 Iteration 4: Subtraktion in der App, materialisiertes Zehnerfeld

Mit der vierten Iteration des Lernmaterials sollte insbesondere eine Lücke der bisherigen Iterationen geschlossen werden: Es sollte eine geeignete Darstellungsform von Subtraktionsaufgaben gefunden werden. Parallel hierzu wurde an einer Materialisierung des Lernmaterials gearbeitet, die einen haptischen Umgang mit dem Zehnerfeld ermöglicht.

7.4.1 Ermöglichen von Subtraktionen in der App

Die vierte Iteration des Lernmaterials wurde erstmals am 29.01.2019 als Version 2.0.0 veröffentlicht. Zuletzt erschien die Version 2.0.2, die im Folgenden dargestellt wird.

Zur Darstellung der Subtraktion wurden mehrere Konzepte entworfen, bis eine Lösung gefunden wurde, die einerseits mit den der App immanenten Regeln vereinbar ist und andererseits von den Lernenden auf unkomplizierte und intuitive Weise verwendet werden kann.

Eine erste Idee war das Sammeln von Kirschen in einem stilisierten Korb, der neben dem Feld dargestellt wird. Nach diesem Konzept hätten die Nutzer*innen die Mengenbilder rückwärts abbauen müssen, um sicherzustellen, dass im Feld die übliche Darstellungsweise von Anzahlen gegeben ist. Kirschen hätten einzeln oder in Paaren aus dem Feld entnommen und dem Korb zugeführt werden können. Diese Idee birgt zwei Schwächen: Erstens müsste das Mengenbild rückwärts abgebaut werden, was eine hohe Konzentration auf das korrekte Abbauen bedeutet hätte). Zweitens wären auf diese Weise lediglich die Differenz (im Feld) und der Subtrahend (im Korb) sichtbar. Das ursprüngliche Mengenbild, der Minuend, wäre hingegen nicht mehr sichtbar.

Eine andere Idee sah vor, eine Darstellungsweise zu übernehmen, die häufig in der Mengendarstellung der Kraft der Fünf zu finden ist: das Durchstreichen von Elementen (Abbildung 7.48).

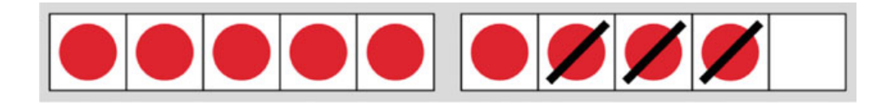


Abbildung 7.48 Die Subtraktionsaufgabe 9 – 3 im Zehnerfeld mit Fünferbündelung

Dieses Konzept ermöglicht die simultane Darstellung des Subtrahenden (durchgestrichene Kreise), der Differenz (nicht durchgestrichene Kreise) und des Minuenden (alle Kreise) im Zehnerfeld. Übertragen auf die Mengenbilder von mathildr würden durchgestrichene Kirschen den Subtrahenden darstellen. Diese Darstellungsweise fügt sich jedoch nur mäßig in die bisherige Darstellung von Rechenoperationen in der App ein. Die Additionsfunktion in mathildr erklärt das Wesen einer Addition: Einer Anzahl wird eine weitere Anzahl hinzugefügt. Beide Anzahlen bilden eine neue Anzahl. Um auf ähnliche Weise die Subtraktion erklärend darzustellen, reicht es nicht aus, Elemente lediglich durchzustreichen. Um durchgestrichene Elemente als Subtrahenden identifizieren zu können, muss das Konzept der Subtraktion mutmaßlich bereits gelernt worden sein. Als Alternative bot sich die Darstellung einer Handlung an: Der Rabe, der aus dem Hauptmenü bekannt ist, frisst Kirschen. Zurück bleiben Kirschkern und -stängel. Sie zeigen, an welcher Stelle zuvor Kirschen zu sehen waren, und symbolisieren den Subtrahenden (Abbildung 7.49).

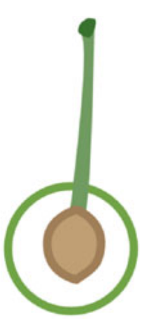


Abbildung 7.49
Kirschkern und -stängel im Ring

Auch in dieser Variante der Subtraktionsdarstellung muss das Mengenbild rückwärts abgebaut werden, damit die Differenz als korrektes Mengenbild abgebildet wird. Um den Nutzer*innen diese Aufgabe zu erleichtern, wurde ein Subtraktionsbutton entwickelt, der nach Berührung einen automatisierten Prozess

initiiert: Nach kurzer Zeit wird automatisch die Kirsche mit der höchsten Ordnungszahl in einen Kirschkern umgewandelt. Wird ein weiteres Mal der Button berührt, wird die Kirsche mit der zweithöchsten Ordnungszahl umgewandelt usw. In Abbildung 7.50 ist der Ablauf der Subtraktion schrittweise dargestellt.

Durch mehrfaches schnelles Antippen des Raben in der Timer-Phase erhöht sich der Subtrahend entsprechend der Häufigkeit. Wird der Rabe häufiger angetippt, als Kirschen im Feld vorhanden sind, werden lediglich die vorhandenen Kirschen in Kerne umgewandelt. Negative Zahlen werden in der App nicht dargestellt. Wurden die Animationen der App im Einstellungsmenü deaktiviert, fliegt der Rabe nicht über das Feld. Stattdessen wird mit jeder Berührung des Subtraktionsbuttons sofort die Kirsche mit der höchsten Ordnungszahl in einen Kern umgewandelt.

Rechenaufgaben, die aus verketteten Additionen und Subtraktionen bestehen, werden nicht dargestellt. Wurde beispielsweise mithilfe von roten und gelben Kirschen $4 + 4$ dargestellt, und daraufhin zweimal auf den Raben getippt, wird im Term-Element lediglich $8 - 2$ in weißen Ziffern angezeigt (Abbildung 7.51).

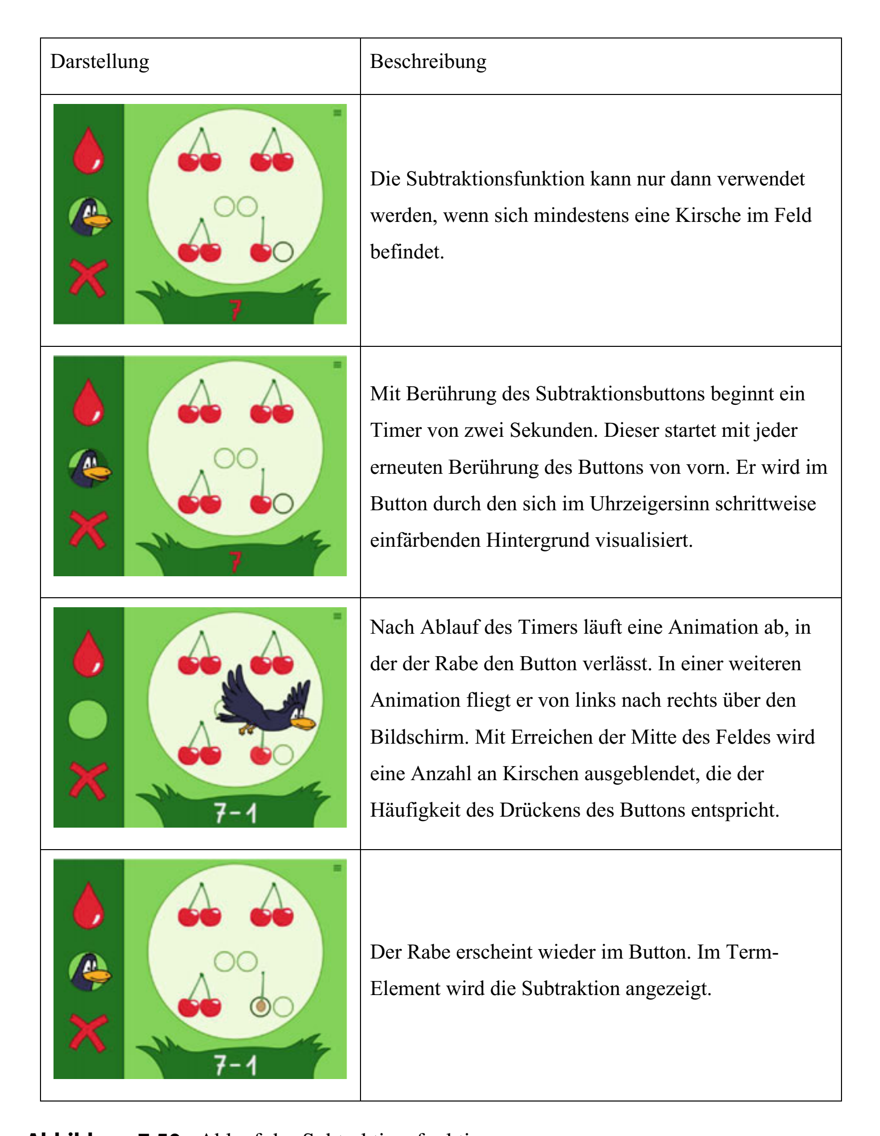
Der Grund für diese Design-Entscheidung ist, dass die App-Mechanik der Regel unterworfen ist, dass im Term-Element immer nur der Inhalt des Feldes in Symbolen dargestellt ist. Eine Darstellung von Kettenaufgaben wie $4 + 4 - 8 + 10 - 5$ ist in den Mengenbildern nicht darstellbar, eine Implementierung wäre daher nicht sinnvoll.

7.4.2 Gestaltung und Einstellungsmöglichkeiten

Eine Rückmeldung, die gelegentlich von Nutzer*innen der App an den Autor gerichtet wurde, war, dass sich nach der Installation der App nicht erschlossen hätte, wie diese zu bedienen sei. Außerdem war laut Rückmeldungen einigen Nutzer*innen nicht bewusst, dass sich die App im Einstellungsmenü individualisieren lässt.

Als Lösung dieses Problems wurde ein Assistent entwickelt, der beim ersten Starten der App in verschiedenen Dialogfenstern auf die Website hinweist und die Nutzer*innen alle Einstellungen vornehmen lässt (Abbildung 7.52). Diese werden gespeichert und können im Nachhinein jederzeit im Einstellungsmenü verändert werden.

Eine Darstellung aller deutschsprachigen Dialogfenster des Assistenten findet sich im Anhang auf Seite 13 im elektronischen Zusatzmaterial.



Darstellung	Beschreibung
7	Die Subtraktionsfunktion kann nur dann verwendet werden, wenn sich mindestens eine Kirsche im Feld befindet.
7	Mit Berührung des Subtraktionsbuttons beginnt ein Timer von zwei Sekunden. Dieser startet mit jeder erneuten Berührung des Buttons von vorn. Er wird im Button durch den sich im Uhrzeigersinn schrittweise einfärbenden Hintergrund visualisiert.
7-1	Nach Ablauf des Timers läuft eine Animation ab, in der der Rabe den Button verlässt. In einer weiteren Animation fliegt er von links nach rechts über den Bildschirm. Mit Erreichen der Mitte des Feldes wird eine Anzahl an Kirschen ausgeblendet, die der Häufigkeit des Drückens des Buttons entspricht.
7-1	Der Rabe erscheint wieder im Button. Im Term-Element wird die Subtraktion angezeigt.

Abbildung 7.50 Ablauf der Subtraktionsfunktion

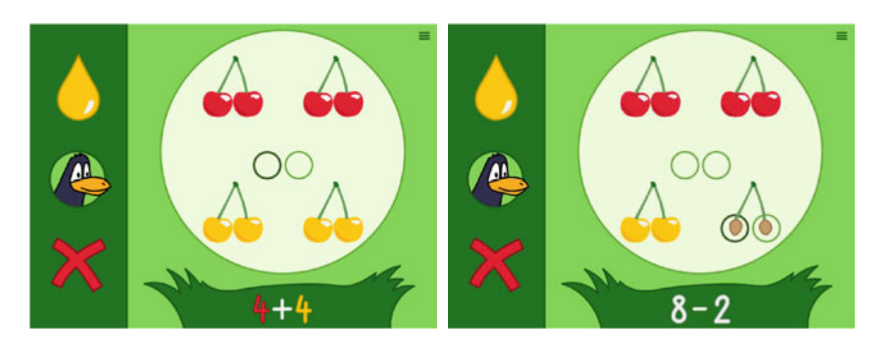


Abbildung 7.51 Links: Die Addition 4 + 4 wird dargestellt. Rechts: Die Subtraktion 8 – 2 wird nach zweimaligem Tippen auf den Subtraktionsbutton dargestellt

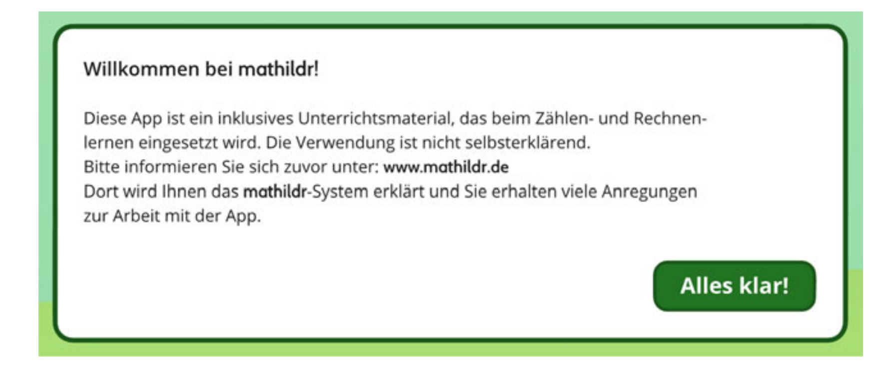


Abbildung 7.52 Begrüßung durch ein Dialogfenster des Assistenten in mathildr 2.0.2

Einige grafische Elemente der App wurden optimiert und die App wurde insgesamt interaktiver gestaltet. Der Rabe im Hauptmenü wurde grafisch überarbeitet und erhielt eine Funktion (Abbildung 7.53): Nach Berührung läuft eine kurze Animation ab, in der er den Schnabel öffnet und wieder schließt. Parallel dazu wird als Soundeffekt ein gekrähtes „mathildr!“ abgespielt, das von dem Schauspieler, Hörspiel- und Synchronsprecher Helmut Krauss († 2019) eingesprochen wurde.



Abbildung 7.53 Screenshot des Hauptmenüs in mathildr 2.0.2

Diese Funktion lässt sich nur einmalig ausführen. Das Hauptmenü muss verlassen und wieder aufgerufen werden, um den Raben erneut krähen zu lassen. Auf diese Weise sollte vermieden werden, dass Schüler*innen im Unterricht in der Klassengemeinschaft mit repetitivem Auslösen der Funktion die Mitschüler*innen stören.

Die Buttons zum Ein- und Ausblenden verschiedenster Elemente wurden leicht überarbeitet und damit eindeutiger gestaltet. Im neuen Einstellungsmenü können nun neben der 4 und der 7 auch alternative Darstellungen der 1 und 9 eingestellt werden. Diese Alternativformen basieren auf Wünschen von Anwender*innen außerhalb Deutschlands (Abbildung 7.54).

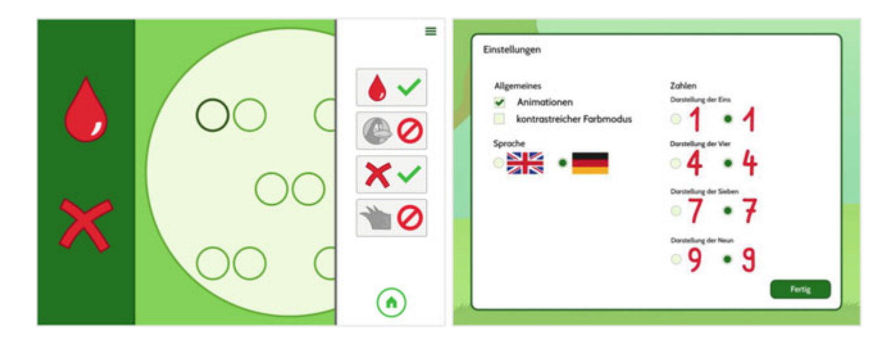


Abbildung 7.54 Screenshot Zehnerfeld mit ausgeklapptem Menü zum Ausblenden verschiedener Elemente und Screenshot Einstellungsmenü in mathildr 2.0.2

Außerdem wurden einige Animationen hinzugefügt, die das Agieren mit der App schlüssiger und natürlicher wirken lassen sollten. Wird die erste Kirsche eines Kirschpaares platziert, erscheint diese nicht unmittelbar, sondern wird binnen kurzer Zeit eingeblendet. Dies ist ebenfalls der Fall, wenn ein Kirschpaar per Multitouch-Geste eingegeben wird. Ist bereits die erste Kirsche eines Kirschpaares vorhanden und wird die zweite durch Berührung hinzugefügt (z. B. beim Zählen), so wird die Bündelung der Kirschen verdeutlicht, indem sich die Kirschen zuneigen (Abbildung 7.55).

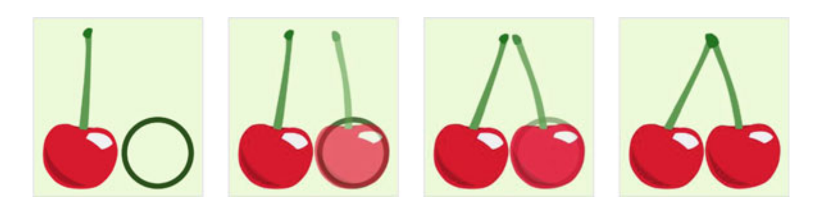


Abbildung 7.55 Ausschnitt aus der Animation beim Platzieren der zweiten Kirsche eines Kirschpaars

Der Subtraktionsbutton zeigt gelegentliche sog. Idle-Animationen, wenn er nicht genutzt wird. Per Zufall zwinkert der Vogel mit beiden Augen oder schaut für einen kurzen Moment nach vorn. Auch diese Animationen sollten dazu beitragen, dass die App natürlicher wirkt (Abbildung 7.56).



Abbildung 7.56 Darstellungen des Subtraktionsbuttons: Standard, Idle-Animation 1 und Idle-Animation 2

Sämtliche Animationen können im Einstellungsmenü bei Bedarf deaktiviert werden.

7.4.3 Materialisierung: Zehnerfeld aus Holz

Parallel zur vierten Iteration des Lernmaterials wurde ein Zehnerfeld aus Holz entwickelt. Zuvor mehrten sich die Anfragen von Lehrpersonen und Eltern, die im Unterricht und beim Lernen zuhause die mathildr-Mengenbilder mit konkretem Material nachbilden wollten. Sie entwickelten eigene Materialisierungen, darunter einen stilisierten Baum aus Holz mit Einsparungen, in die farbige Perlen als Kirschen gelegt werden können (Abbildung 7.57).

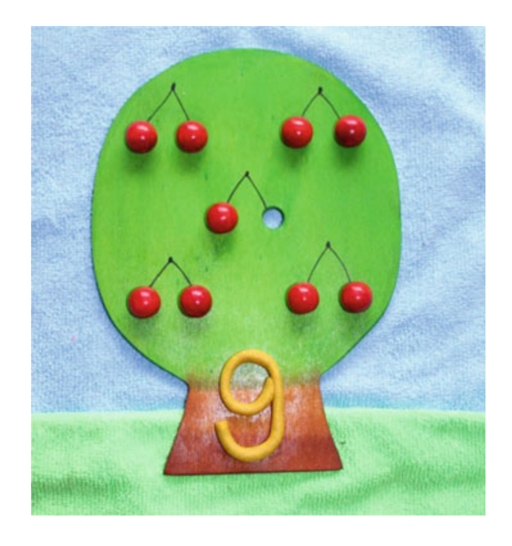


Abbildung 7.57 Materialisierung des Zehnerfeldes als Zehnerbaum. Die Kirschen bestehen aus roten Perlen, die Ziffer ist aus Modelliermasse hergestellt. Uhrheberin: Sabine Hubben-Thöni

Für den Mathematikunterricht an einer Förderschule klebte eine Lehrerin kleine Plastikbecher auf die Innenseite eines Pappdeckels. Anstelle der Kirschen konnten hier kleine Bälle hineingelegt werden. Diese Materialisierungen erlaubten es, die Mengenbilder mit konkreten Materialien nachzubilden. Eine Kombination zweifarbiger Materialien ermöglichte die Darstellung von Additionen, Subtraktionen konnten durch Wegnehmen dargestellt werden.

Das *mathildr-Zehnerfeld* plante der Autor gemeinsam mit Albrecht Koch, der sich auch für die Herstellung des Feldes verantwortlich zeigte. Es besteht aus einer runden Holzplatte mit Ahornfurnier und Einbuchtungen, in die Kirschen aus Holz gelegt werden können. An den Einbuchtungen befinden sich längliche Aussparungen für die Kirschstängel. Die Holzkirschen liegen demnach nicht plan auf dem Feld, sondern stehen in einem spitzen Winkel von diesem ab. Dies

ermöglicht das Greifen der Kirschen am Stängel bei gleichzeitig gutem Sitz im Feld (Abbildung 7.58).



Abbildung 7.58 mathildr-Zehnerfeld: Materialisierung des mathildr-Zehnerfeldes aus Holz

An jeder Einbuchtung befinden sich zwei Aussparung, die es ermöglichen, jede Kirsche senkrecht hineinzulegen und zwei Kirschen zu einem Paar zusammenzuführen. Auf diese Weise kann die Paarbildung aus der App nachgeahmt werden (Abbildung 7.59).



Abbildung 7.59 Jede einzelne Kirsche kann senkrecht in das Feld gelegt werden

Das Zehnerfeld aus Holz ist ausgereifter als die erste Iteration des Lernmaterials. Die Handhabung verbleibt gleichwohl feinmotorisch herausfordernder als die der App. Vorgaben zum korrekten Aufbau der Mengenbilder werden in dieser Materialisierung nicht gegeben, da die maschinelle Funktion der App nicht komplett abgebildet ist. Durch die fehlende Restriktion im Aufbau der Mengenbilder

haben Lernende die Möglichkeit, eigene Mengenanordnungen zu entwerfen und zu untersuchen: So können beispielsweise vier Kirschen gezählt und in die Ecken des Feldes gelegt werden. Werden diese dann zum Mengenbild der 4 umgeordnet, wird damit verdeutlicht, dass vier einzelne Kirschen zwei Paaren entsprechen.

Für die Arbeit mit dem Zehnerfeld aus Holz wurden Lernideen formuliert, die vielen Lernideen zum Zehnerfeld der App entsprechen.

Beispielsweise wird die Lernidee *Mengenbild nachlegen* folgendermaßen beschrieben:

> Benötigt werden Karten, die die Mengenbilder 0 bis 10 zeigen. Die Karten werden gemischt und verdeckt auf den Tisch gelegt. Eine Karte wird gezogen. Das Mengenbild auf der gezogenen Karte wird auf dem Zehnerfeld nachgelegt. Danach wird gesagt, um welche Zahl es sich handelt und wie das Mengenbild aussieht: Für jedes gelegte Kirschpaar wird *Paar* gesagt, für jede gelegte Kirsche *Kirsche.* Die 4 wird demnach als *Paar, Paar* bezeichnet. Nun wird die nächste Karte gezogen.

7.4.4 Update der Website

Mit Veröffentlichung der mathildr-App 2.0 erhielt die Website eine Aktualisierung. In kurzen Videoclips wurden nun die Funktionalität der App und der Umgang mit den Materialien erklärt. Die Lernideen wurden erweitert und größtenteils durch kurze Videoclips ergänzt (Abbildung 7.60).

Eine Darstellung aller Lernideen findet sich im Anhang ab S. 16 im elektronischen Zusatzmaterial.

7.4.5 Erprobung

Die vierte und vorerst finale Iteration des Lernmaterials wird nach Wissen des Autors an Regel- und Förderschulen, beim Lernen zuhause, in der Lern- und Ergotherapie und in der Nachhilfe eingesetzt. Er selbst verwendet das Lernmaterial in der Entwicklungstherapie mehrerer Lernender mit Simultandysgnosie. Im Folgenden werden die Beobachtungen zur Entwicklung und zur Arbeit mit der Subtraktionsfunktion und dem Zehnerfeld aus Holz zusammengefasst.



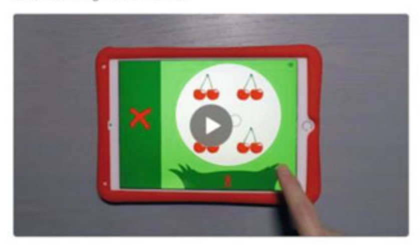
Kirschen zählen im Viererfeld

Wenn Sie mit einem Kind arbeiten, das noch keine oder nur wenig Erfahrungen mit dem Zählen gesammelt hat, empfehlen wir die Arbeit mit dem Viererfeld. Stellen Sie die Sichtbarkeit des Farbwechselbuttons (Tropfen) und des Minusbuttons (Vogel) aus. Lassen Sie das Kind erkunden, wie Kirschen in der App platziert werden können. Der dunkel eingefärbte Ring muss berührt werden, damit eine Kirsche erscheint. Zählen Sie dabei gemeinsam laut mit.



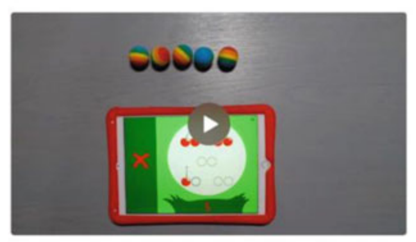
Kirschen zuordnen im Viererfeld

Stellen Sie die Sichtbarkeit des Farbwechselbuttons (Tropfen) und des Minusbuttons (Vogel) aus. Präsentieren Sie dem Kind 1-4 große oder kleine Objekte. Bitten Sie das Kind darum, für jedes der Objekte eine Kirsche im Viererfeld zu platzieren. Zählen Sie dabei laut mit.



Kirschen zählen im Zehnerfeld

Das Kind, mit dem Sie arbeiten, hat bereits Vorerfahrungen im Umgang mit Zahlen? Dann zählen Sie gemeinsam im Zehnerfeld. Stellen Sie zuvor die Sichtbarkeit des Farbwechselbuttons (Tropfen) und des Minusbuttons (Vogel) aus. Lassen Sie nun das Kind erkunden, wie Kirschen in der App platziert werden können. Nach Berührung des dunkel eingefärbten Ringes erscheint eine Kirsche. Platzieren Sie gemeinsam 10 Kirschen und zählen Sie dabei laut mit.



Kirschen zuordnen im Zehnerfeld

Stellen Sie die Sichtbarkeit des Farbwechselbuttons (Tropfen) und des Minusbuttons (Vogel) aus. Suchen Sie gemeinsam mit dem Kind 1-10 große oder kleine Objekte. Bitten Sie das Kind darum, für jedes der Objekte eine Kirsche im Zehnerfeld zu platzieren. Zählen Sie dabei laut mit.

Abbildung 7.60 Ausschnitt der Lernideen zur Arbeit mit der mathildr-App auf der Website www.mathildr.de, Stand: 28.06.2020

7.4.5.1 Subtraktionsfunktion

Vor der Veröffentlichung des Updates der App, das die Subtraktionsfunktion hinzufügte, arbeitete Noa (9;8 Jahre) mit dem Autor intensiv mit verschiedenen Prototypen der Subtraktionsfunktion. Dabei wurde großen Wert darauf gelegt, dass sie die Handlung „Der Rabe frisst Kirschen“ ohne weitere Unterstützung versteht. Die Animation wurde hierauf abgestimmt. Weiterhin wurde der Timer, der nach Berührung des Subtraktionsbuttons abläuft, an Noas Tippgeschwindigkeit angepasst. Einerseits sollte ihr genügend Zeit gegeben werden, um erneut den Button zu betätigen, um den Subtrahenden zu erhöhen, andererseits sollte aber auch nicht zu viel Zeit vergehen, um den Subtraktionsvorgang nicht unnötig

in die Länge zu ziehen. Noa probierte verschiedene Versionen aus, bis eine optimale Dauer gefunden wurde. Den Raben bezeichnete sie als „sehr lustig“. Später rechnete Noa Subtraktionsaufgaben im Zwanzigerfeld. Die Animationen waren dabei ausgeschaltet, damit der Subtraktionsvorgang zügig vonstattengeht.



Abbildung 7.61 Hendrik berechnet Subtraktionsaufgaben mit Hilfe der mathildr-App

Hendrik (7;9 Jahre) fürchtete sich ein wenig vor dem Raben, den er in einem Prototyp der App sah. Grund hierfür war, dass die Fluganimation anfangs in sehr hoher Geschwindigkeit abgespielt wurde und er den Raben als Gespenst interpretierte. Die Geschwindigkeit der Animation wurde daraufhin angepasst und das Missverständnis damit geklärt. Hendrik nutzte fortan gerne die Subtraktionsfunktion und löste anfangs Aufgaben im Zahlenraum 10, später im Zahlenraum 20 (Abbildung 7.61).

7.4.5.2 mathildr-Zehnerfeld

In der Entwicklung des Zehnerfeldes aus Holz wurde darauf Wert gelegt, dass der Einsatz von Holzkirschen feinmotorisch nicht zu herausfordernd wird. Daher wurden die Prototypen von Beginn an mit drei- und vierjährigen Kindern mit Trisomie 21 erprobt, obwohl der Autor die Zielgruppe des Zehnerfeldes eher im Schulalter angesiedelt hatte (Abbildung 7.62).

Beim Erproben des Materials stellte sich heraus, dass diese Materialisierung für Kinder attraktiv und händelbar ist. Die Kirschstängel konnten von den Lernenden gut gegriffen werden, das Setzen der Kirschen und das Zusammenführen von Kirschstängeln bereiteten keine Schwierigkeiten. Der Autor setzt die Materialisierung daher weiterhin zum Zählenlernen mit Vorschüler*innen ein.



Abbildung 7.62 Zwei Vorschüler*innen mit Trisomie 21 legen Holzkirschen in Zehnerfelder

Es erwies sich als empfehlenswert, das Zehnerfeld im Unterricht als Alternative zum Tablet anzubieten. Der Schüler Paul (12;2 Jahre) bevorzugte die Arbeit mit dem haptischen Material anstelle der Arbeit mit dem Tablet. Additionen und Subtraktionen im Zahlenraum 10 löste er anfangs mit Hilfe der Holzkirschen, später ließ er die Kirschen weg und zeigte lediglich auf die Stellen des Zehnerfeldes, auf die er Kirschen legen würde (Abbildung 7.63).

Später genügte es Paul, den Blick über das Zehnerfeld schweifen zu lassen, um die Aufgaben zu lösen. Einige Aufgaben des Kleinen 1 + 1 löste er im Kopf ohne Zuhilfenahme des Zehnerfeldes.

7.4.6 Umsetzung der Kriterien

Mit der Implementierung der Subtraktionsfunktion wird nun dem Kriterium der Fehlerkontrolle Rechnung getragen. Eingegebene Subtraktionsaufgaben können anhand des Term-Elements auf Eingabefehler überprüft werden. Weiterhin ist das Kriterium *Angebot wesentlicher Operationen* erfüllt. Damit ist allen zuvor aufgestellten Anforderungen zur Entwicklung eines neuen Lernmaterials zur Mengendarstellung nachgekommen worden.

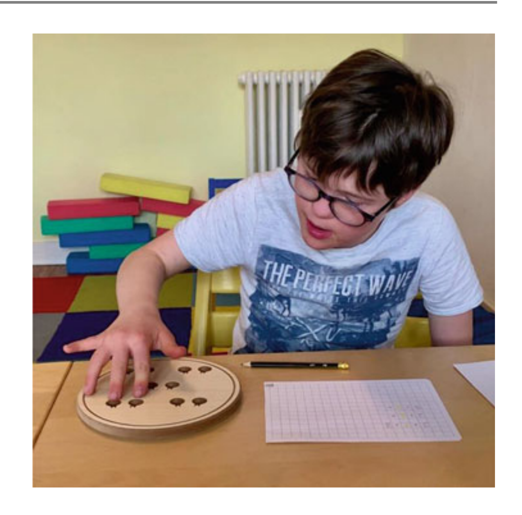


Abbildung 7.63 Paul deutet mit Zeige- und Mittelfinger auf das zweite Kirschpaar

Das Kriterium 2a, die angestrebte Redundanz, wurde folgendermaßen beschrieben: „Das Lernmaterial unterstützt die Lernenden darin, ein inneres Bild des Materials zu entwickeln, das anstelle des gegenständlichen Materials verwendet werden kann". An dieser Stelle des Entwicklungsprozesses lag noch keine Evidenz darüber vor, dass die Mengenbilder tatsächlich mental nachgebildet werden können.

7.5 Designprinzipien

Im Folgenden werden die Designprinzipien, die sich während der Entwicklung des Lernmaterials ergaben, wiedergegeben (vgl. Unterkapitel 5.2.4). In Anlehnung an Van der Akker (1999, S. 9) werden die Designprinzipien als heuristische Aussage definiert:

Um ein Lernmaterial zu designen, das

- Personen mit Aufmerksamkeitsbesonderheiten darin unterstützt, das Zählen zu üben und für sie erfassbare und mental nachbildbare Mengenbilder zu erlernen,
- Additionen, Subtraktionen und Zahlzerlegungen darstellt und
- allgemeinen sowie für Anschauungsmaterialien und Mengendarstellungen spezifischen Kriterien zur Entwicklung von Lernmaterialien entspricht,

sollte insbesondere berücksichtigt werden, dass

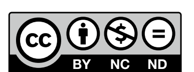
- die Mengenbilder Bündelungsformen und Superzeichen zur Entlastung der Aufmerksamkeit nutzen,
- seine Handhabung barrierefrei ist,
- ein individueller Umgang und eine Differenzierung durch Auswahl des Zahlenraumes möglich sind,
- grundsätzliche Aspekte des Lernmaterials in Materialisierungen überführt werden können, die den Lernenden alternative Lösungswege bieten

und folgende Verfahren zum Einsatz kommen:

- Computertachistoskopie oder andere geeignete Verfahren zur Messung der Aufmerksamkeit einer spezifischen Person oder Personengruppe, um die optimale Bündelungsgröße zu ermitteln,
- Erprobung der Prototypen des Lernmaterials durch Personen der Zielgruppe, um erste Verbesserungen vorzunehmen,
- Entwicklung einer digitalen Lösung, um den Aufbau der Mengenbilder abzubilden und die Entsprechung der aufgestellten Kriterien zu gewährleisten,
- Erprobung der digitalen Lösung im Unterricht mit einer größeren Anzahl an Schüler*innen mithilfe von Kompetenzrastern,
- Erweiterung der digitalen Lösung unter permanenter Erprobung durch Schüler*innen,
- Entwicklung von Materialisierungen unter permanenter Erprobung durch Schüler*innen.

Diese Designprinzipien geben nicht nur das gewonnene inhaltliche Wissen wieder, sondern zeichnen auch den Entstehungsprozess und die angewandten Methoden nach. Sie zeigen, dass die Entwicklung barrierefreier Lernmaterialien nicht trivial ist und einer eingehenden Erprobung bedarf. Dabei ist das Verwerfen von Ideen, die sich als ungeeignet erweisen, ebenso notwendig wie die Optimierung von Lösungen, die bereits Anklang finden.

Der iterative Charakter der Entwicklung des Lernmaterials erlaubt es, auch über bestehende Forschungszeiträume hinaus Optimierungen und Aktualisierungen vorzunehmen. Das vorliegende Lernmaterial kann als App jederzeit aktualisiert werden und es lassen sich weitere Materialisierungen und Lernideen nach positiver Erprobung der Materialauswahl und der Website hinzufügen.


cc
BY NC ND

8 Abschließende Evaluierungsphase

Die Lernerfolge der Schüler*innen, die mit dem mathildr-System gearbeitet haben, belegen, dass es sich dabei um ein Unterrichtsmaterial handelt, mit dem das Zählen gelernt werden kann und sich Rechenoperationen veranschaulichen lassen. Zwar legt diese positive Erfahrung nahe, dass sich das System zur Entwicklung mentaler Mengenbilder eignet, sie ist als reine Beobachtung aber nicht evident. Im folgenden Kapitel wird mithilfe des Eye-Tracking-Verfahrens untersucht, ob es Menschen mit Simultandysgnosie gelingt, eine mentale Vorstellung der Mengenbilder zu entwickeln.

Zuvor wird eine These für die abschließende Evaluierungsphase formuliert und ein Überblick über die Möglichkeiten des Eye-Tracking-Verfahrens gegeben. Es folgt die Darstellung einer vorexperimentellen Versuchsanordnung, bei der mit Hilfe von neurotypischen Schüler*innen eine abhängige Variable spezifiziert wurde, die bei Personen, die eine mentale Vorstellung der mathildr-Mengenbilder entwickelt haben, vermehrt auftritt. Diese bildet den Kern einer Kalkulation, die in einem nachfolgenden Quasi-Experiment überprüft wird. Im Experiment konnte die abhängige Variable bei Personen mit Trisomie 21 ebenfalls nachgewiesen werden.

Ergänzende Information Die elektronische Version dieses Kapitels enthält Zusatzmaterial, auf das über folgenden Link zugegriffen werden kann https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_8.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_8

8.1 These

Die Fragestellung dieses Forschungsprojektes wurde folgendermaßen formuliert:

Ist es möglich, ein Unterrichtsmaterial mit Hilfe von Educational Design Research zu entwickeln, das

a) Kriterien zur allgemeinen Gestaltung von Unterrichtsmaterialien nach Montessori, zu Anschauungsmaterialien nach Klafki und Galperin sowie zur Mengendarstellung nach Kühnel erfüllt,

b) Darstellungen von Mengen und Rechenoperationen beinhaltet, die Menschen mit Simultandysgnosie erfolgreich anwenden, und.

c) empirische Hinweise zulässt, dass Menschen mit Simultandysgnosie tatsächlich mentale Bilder entwickeln?

(vgl. Unterkapitel 6.3).

In der vorbereitenden Forschungsphase wurden hierzu Theoreme aufgestellt, die in die Entwicklungsphase eingeflossen und durch Beobachtungen der Lernenden konkretisiert worden sind. Die Teile a) und b) der Fragestellung wurden bereits in der Entwicklungsphase der Lernmaterialien rund um das mathildr-System hinlänglich beantwortet. Offen bleibt allerdings die Beantwortung des Teils c) und damit die Frage, ob die Mengenbilder tatsächlich für Personen mit Simultandysgnosie einprägsam sind. Die These, die in der abschließenden Evaluierungsphase geprüft wird, lautet:

> *Personen mit Simultandysgnosie können sich die mathildr-Mengenbilder einprägen und eine mentale Vorstellung von ihnen entwickeln.*

Beobachtungen aus Lernsituationen scheinen diese These regelmäßig zu verifizieren. Beispielsweise kann der Schüler Paul die Mengenbilder verbalisieren, auch wenn er sie nicht vor Augen hat. Wird er gefragt, wie die Zahl 5 als Mengenbild aussehe, richtet er seinen Blick in die Ferne und sagt „Paar, Paar, Kirsche!“. Dies gelingt ihm fehlerfrei bei allen Mengenbildern bis 10. Diese Beobachtung allein lässt allerdings keine objektive Nachvollziehbarkeit zu. Wissenschaftliche Objektivität bedarf grundsätzlich einer experimentellen Überprüfung (Zimpel, 2010c, S. 35). Die reine Beschreibung von Pauls Fähigkeit zur Verbalisierung schließt nicht aus, dass es sich um einen Einzelfall handelt oder dieser die Verbalisierungen lediglich auswendig gelernt hat. Ähnlich verhält es sich bei der Schülerin Noa, die, nachdem sie die Aufgabe $2 + 2$ im Kopf gelöst hatte, erklärte, dass sie sich „ein Paar und noch ein Paar, also vier Kirschen“ vorgestellt habe. Ihre Aussage ist ein Hinweis darauf, dass sie tatsächlich die Mengenbilder mental

nachgebildet hat, aber kein Beweis. Der Schüler Max löst die Additionsaufgabe 8 + 2, indem er seine Hand ausstreckt und „Ich habe 8.“ sagt. Daraufhin streckt er zwei Finger aus, und tippt, als würde er ein Kirschpaar in das Zehnerfeld der mathildr-App legen und sagt: „Ich habe 2. Dann sind das 10.“ (Abbildung 8.1).



Abbildung 8.1 Max stellt sich die Additionsaufgabe 8 + 2 mutmaßlich vor dem inneren Auge vor. Er schreibt das korrekte Ergebnis 10 auf

Es scheint, als hätte sich Max vorgestellt, ein Zehnerfeld nach dem mathildr-System mit Kirschen zu füllen. Dies bleibt gleichwohl eine Beobachtung der Außensicht. Zimpel (2010d, S. 37) zeigt, „dass der innere, subjektive Sinn eines Verhaltens nicht mit dem Sinn übereinstimmen muss, den ihm Personen aus der Außensicht zuschreiben“. Die tatsächlichen Vorstellungen und Gedankengänge von Noa und Max können nicht ohne Weiteres abgebildet werden.

Bewusst getätigte Äußerungen der Untersuchungspersonen stellen keine hinreichende Verifizierung dafür dar, dass sie tatsächlich eine mentale Vorstellung von den Mengenbildern entwickelt haben. Daher sollte ein experimentelles Setting gefunden werden, das das subjektive Erleben abzeichnet und einen Einblick in die Innensicht ermöglicht, das valide Rückschlüsse auf mentale Vorgänge zulässt und dessen Datenerhebung von den Untersuchungspersonen nicht bewusst manipuliert werden kann.

8.2 Eye-Tracking zum experimentellen Nachweis mentaler Vorstellungen

Die Beobachtung des menschlichen Auges kann Rückschlüsse auf mentale Prozesse der Untersuchungsperson ermöglichen. Zokaei, Board, Manohar und Nobre (2019) wiesen beispielsweise nach, dass bereits der Gedanke an helle Objekte

zu einer Verkleinerung der Pupillen führen kann. Gedanken an dunkle Objekte können wiederum eine Erweiterung der Pupillen hervorrufen.

Nicht nur die Pupillenweite, sondern auch die Blickbewegungen von Untersuchungspersonen weisen auf mentale Prozesse hin. Eine Möglichkeit, diese sichtbar zu machen, ist das sog. Eye-Tracking. Eye-Tracking differenziert zwei Anwendungsformen: Erstens tritt es als interaktive Anwendung auf, bei der Blickbewegungen in Echtzeit Systeme steuern, zweitens als diagnostische Anwendung, bei der Blickverläufe und -punkte mit technischer Hilfe aufgezeichnet und in einer Form aufbereitet werden, die eine spätere Analyse der Daten ermöglicht (Duchowski, 2017, S. 98).

Ein Blickverlauf ist immer eng mit den Informationsanforderungen der aktuellen Tätigkeit und den eigenen Verhaltenszielen verknüpft (Tatler & Land, 2015, S. 391). Die verschiedenen Elemente des Blickverlaufes lassen sich dabei wie folgt klassifizieren:

Phasen, in denen der Blick auf einem Punkt ruht, werden als *Fixationen* bezeichnet. Dabei gelten Ort, Dauer und die Reihenfolge der Fixationen als wesentliche Parameter, die für die Beantwortung von Fragestellungen herangezogen werden können (Pfeiffer & Weidner, 2013, S. 189). Eine einzelne Fixation reicht allerdings nicht aus, um sich ein detailliertes Bild von einem Objekt zu machen. Denn aufgrund der Beschaffenheit der Netzhaut entsteht nur auf einem kleinen Abschnitt, der Fovea centralis, ein scharfes Bild. Mehrere Fixationen sind nötig, um verschiedene Teilbilder einzufangen, die dann gedanklich zu einem Gesamtbild zusammengefügt werden. Die sprungartigen Blickbewegungen, die zwischen solchen Fixationen stattfinden, werden als *Sakkaden* bezeichnet. Sakkaden dauern zwischen 30 und 100 ms und sind notwendig, um ein Bild im Detail zu erkennen. Eine bewusste Modifizierung einer Sakkade ist nicht möglich (Breiner, 2019, S. 112).

Neben Sakkaden existieren noch weitere Klassifikationen von Blickbewegungen, die beispielsweise dem Ausgleich einer Kopfbewegung bei gleichzeitiger Fixation dienen (Leigh & Zee, 2015, S. 7), aber für die vorliegende Arbeit nicht von Belang sind. Das Aufkommen von Fixationen ist nicht vom Zufall abhängig: Fixationspunkte markieren sog. Interesting Spots, die dabei helfen, einen visuellen Eindruck korrekt zu interpretieren (Deubel & Schneider, 1996, S. 1827). Maßgeblich verantwortlich für die erfolgreiche Identifizierung eines Objekts ist insbesondere die letzte Fixation eines Blickverlaufes, die als Landing Position bezeichnet wird (Deubel & Schneider, 1996, S. 1834).

Experimentelle Settings, die Sakkaden und Fixationen als Parameter aufzeichnen, haben demnach den Vorteil, dass sie von den Untersuchungspersonen nicht bewusst manipuliert werden können. Denkbar wäre lediglich eine Boykottierung

eines solchen Experiments, indem die Untersuchungsperson die Augen schließt oder bewusst ihren Blick abwendet.

8.2.1 Eye-Tracking in der Forschung

Experimente zu Blickverläufen sind insbesondere im Bereich des Marketings anzutreffen. Jährlich werden tausende Studien durchgeführt, in denen durch Eye-Tracking Blickbewegungen aufgezeichnet werden, um Werbetafeln, Schaufenster, Internetwerbung etc. zu optimieren und die Endverbraucher*innen zum Konsum anzuregen (Wedel, 2015, S. 569). Auch in der Schlafforschung, der neuropsychologischen Diagnostik und bei der Erforschung psychischer Krankheitsbilder hat sich das Eye-Tracking als Forschungsinstrument etabliert (Pfeiffer & Weidner, 2013, S. 182).

In der Lernforschung haben Eye-Tracking-Verfahren ebenfalls Einzug gehalten, wie die bereits in Unterkapitel 3.2 erwähnte Studie zu Dyskalkulie von Moeller, Neuburger, Kaufmann et al. (2009) zeigt. Um die Fähigkeit zur Simultanerfassung zu überprüfen, wurden jeder Untersuchungsperson in einer individuellen Untersuchung Punkte auf einem Bildschirm präsentiert, deren Anzahl benannt werden sollte. Die Präsentationszeit steuerte die Untersuchungsperson dabei selbständig. Sobald sie die Anzahl der Punkte erkannte, drückte sie einen Knopf. Das Punktmuster verschwand und die Untersuchungsperson nannte die Anzahl. Mit dem Knopfdruck erschien außerdem ein Störbild, auf das eine Fixationsmarkierung folgte, die von den Untersuchungspersonen in Vorbereitung auf das nächste Punktmuster fixiert werden sollte (Moeller et al., 2009, S. 376). Dank des Einsatzes eines Eyetrackers konnten nicht nur Reaktionszeit und Fehlerrate, sondern darüber hinaus auch die Anzahl der Fixationen und deren Dauer je Punktmuster ermittelt werden. Auf diese Weise konnten die Grenzen der Simultanerfassung individueller Untersuchungspersonen bestimmt werden.

8.2.2 Vorüberlegungen zum Forschungsdesign

Das Ziel dieser abschließenden Evaluierungsphase besteht darin, zu ermitteln, ob Personen mit Trisomie 21 die mathildr-Mengenbilder verinnerlicht haben. Da die mathildr-Mengenbilder im Gegensatz zu den Punktmustern im o. g. Versuchsaufbau systematisch aufgebaut sind und in der Regel quasi-simultan erfasst werden, musste ein abweichender Versuchsaufbau verwendet werden. Neben der Erfassung der Anzahl von Fixationen und deren Dauer sollten die Blickverläufe als

solche aufgezeichnet werden. Da Blickverläufe auf mentale Prozesse hinweisen, wurde davon ausgegangen, dass sich Blickverläufe von Personen, die das mathildr-System verinnerlicht haben, von solchen unterscheiden, bei denen dies noch nicht der Fall ist. Dieser Vermutung liegt ein Wenn-dann-Gefüge zu Grunde: Wenn eine Untersuchungsperson die Mengenbilder internalisiert hat, dann zeigt sie einen spezifischen Blickverlauf. Variablen, die gesetzmäßig verknüpft sind, werden als *unabhängige Variablen* und *abhängige Variablen* bezeichnet. Die unabhängige Variable ist die systemisch beeinflusste Variable (Hager, 1987, S. 50) und in diesem Fall als *Verinnerlichung der mathildr-Mengenbilder* definiert. Die als Folge daraus betrachtete abhängige Variable baut auf dem spezifischen Blickverlauf auf, der bisher noch nicht definiert ist.

Eine erste vorexperimentelle Versuchsanordnung soll zu einer Spezifizierung dieser abhängigen Variable führen: Es sollen Daten darüber gewonnen werden, welche Indikatoren erfüllt sein müssen, um anhand des Blickmusters einer Untersuchungsperson von einer Internalisierung der Mengenbilder ausgehen zu können. Dazu wurden neurotypischen Schüler*innen für einen kurzen Augenblick mathildr-Mengenbilder präsentiert. Ihre Aufgabe bestand nun darin, die Mengenbilder zu benennen. Ihr Antwortverhalten und ihre Blickverläufe wurden aufgezeichnet und analysiert, um die abhängige Variable zu spezifizieren.

Im Anschluss wurde in einem Quasi-Experiment überprüft, ob diese neudefinierte abhängige Variable vermehrt bei Personen mit Trisomie 21 auftritt, die bereits seit einiger Zeit mit dem mathildr-Lernmaterial gearbeitet haben. Die unabhängige Variable lautet hier: *Bekanntheit der mathildr-Mengenbilder durch Unterricht.* Geprüft wurde, ob die zuvor in der vorexperimentellen Versuchsanordnung ermittelte abhängige Variable in diesem Fall ebenfalls eine abhängige Variable darstellt.

8.3 Vorexperimentelle Versuchsanordnung: Spezifizierung der abhängigen Variable durch Eye-Tracking-Untersuchung

In dieser empirischen Untersuchung wurden lediglich neurotypische Schüler*innen untersucht. Aufgrund der fehlenden Kontrollgruppe handelt es sich nicht um ein Experiment, sondern um eine One-Shot-Case-Study, die als weniger aussagekräftig gilt, weil präexperimentelle Ausprägungen der abhängigen Variable und weitere Einflussgrößen unkontrolliert bleiben (Musahl & Schwennen,

2000). Hager bezeichnet solche Untersuchungen auch als *Ein-Gruppen-Ex-post-facto-Fallstudie*. Da die Vergleichsmöglichkeit fehlt, ist die betrachtete Hypothese nur wenig prüfbar (Hager, 1987, S. 70).

Im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit ist diese Form der empirischen Untersuchung gleichwohl ausreichend, da sie lediglich zum Auffinden der abhängigen Variable des folgenden Quasi-Experiments genutzt wurde und keine Aussagen über die Gruppe der neurotypischen Untersuchungspersonen getroffen werden sollten.

8.3.1 Fragestellung

Um einen Eindruck davon zu erhalten, welche Sakkaden und Fixationen auftreten, wenn Personen ein mathildr-Mengenbild erfolgreich identifizieren, wurden Untersuchungen mithilfe von Eye-Tracking durchgeführt. Die Frage, die durch diese vorexperimentelle Versuchsanordnung beantwortet werden soll, lautet:

> *Wie lässt sich durch Unterstützung von Eye-Tracking feststellen, ob eine Untersuchungsperson eine mentale Vorstellung des mathildr-Systems entwickelt hat?*

Zur Beantwortung dieser ergebnisoffenen Frage wurden neurotypischen Schüler*innen die Mengenbilder jeweils für einen kurzen Moment präsentiert. Die Untersuchungspersonen wurden darum gebeten, nach der Präsentation eines jeden Mengenbildes die Anzahl der dargestellten Kirschen zu benennen. Die Augenbewegungen wurden durch Eye-Tracking aufgezeichnet und im Anschluss analysiert.

8.3.2 Stichprobe

An der Untersuchung nahmen sechs neurotypische Regelschülerinnen und 14 neurotypische Regelschüler im Alter von 7;1 bis 11;4 Jahren (Durchschnittsalter 8;11) teil. Alle Untersuchungspersonen absolvierten zuvor das Experiment zur Zahlbegriffsentwicklung (vgl. Unterkapitel 2.2.2.2) fehlerfrei. Es wurde zudem sichergestellt, dass sie Mengen bis 10 nachzählen können. Die Daten zu den Blickbewegungen zweier weiterer Untersuchungspersonen konnten aufgrund von Messfehlern, die mutmaßlich durch starke Kopfbewegungen verursacht wurden, nicht ausgewertet werden.

8.3.3 Technische Realisierung und Versuchsaufbau

Jede Untersuchungsperson saß allein mit dem Versuchsleiter in einem ruhigen Raum. Ihre Augenbewegungen wurden mit einem mobilen Eyetracker (Tobii X120 von Tobii Technology) aufgezeichnet. Sie blickte in einem Abstand von ca. 50 cm auf einen LED-Monitor (Dell U2412M) im Format 16:10 mit einer Bildschirmdiagonale von 61 cm und einer Reaktionszeit von 8 ms. Das Bild des Monitors wurde von dem Versuchsleiter über ein Notebook kontrolliert, das von der Untersuchungsperson nicht eingesehen werden konnte.

Auf dem Notebook wurde die Software Tobii-Studios (Version 3.2.3) verwendet, um den Kalibrierungsprozess des Eyetrackers vorzunehmen und die Untersuchung zu steuern. Nach der hochauflösenden Kalibrierung wurde der Untersuchungsperson erklärt, dass Bilder immer nur kurz zu sehen sein würden und ihre Aufgabe darin bestehe, das Bild korrekt zu benennen. Als Beispiel wurde die Zeichnung eines Hundes für 0,6 s gezeigt. Die Untersuchungsperson wurde darum gebeten, mitzuteilen, was sie auf dem Bild gesehen habe. Nachfolgend wurde ihr eine Darstellung einer einzelnen Kirsche gezeigt und erklärt, dass dieses Bild *1* darstelle. Dann wurde ihr ein Kirschpaar präsentiert und erklärt, dass auf diese Weise die Anzahl 2 dargestellt werde. Daraufhin begann die eigentliche Untersuchung, in deren Verlauf alle mathildr-Mengenbilder im Zehnerfeld von 0 bis 10 in zwei Durchgängen jeweils in zufälliger Reihenfolge präsentiert wurden. Die Reihenfolge wurde beim Konzipieren des Versuchs durch Losen festgelegt und unterscheidet sich unter den Untersuchungspersonen nicht. Im ersten Durchgang lautete sie: 0, 5, 1, 2, 6, 9, 8, 10, 4, 7, 3; im zweiten Durchgang: 4, 6, 3, 9, 7, 10, 5, 2, 0, 1, 8.

Jedes Mengenbild wurde für exakt 0,6 s gezeigt. Von einer selbständigen Steuerung der Präsentationsdauer durch die Untersuchungsperson wurde abgesehen, um a) ein Nachzählen der Kirschen zu erschweren und b) die Ergebnisse durch mögliche Unterschiede im Reaktionsvermögen der Untersuchungspersonen nicht zu beeinflussen.[1] Nachdem das Mengenbild aufblitzte, erschien ein Störbild, das aus weißem Rauschen bestand, um zu vermeiden, dass die Untersuchungsperson ein eventuell auftretendes Nachbild zum Nachzählen verwendet. Die Anzeigedauer des Störbildes wurde vom Versuchsleiter kontrolliert. Sobald die Untersuchungsperson bereit war und sich auf den Bildschirm konzentrierte, löste er die Präsentation des nächsten Mengenbildes aus. Auf eine Fixationsmarkierung

[1] Eine kürzere Anzeigedauer würde zu Messungenauigkeiten führen. Bei der Eintragung von kurzen Anzeigedauern gibt die Software den Hinweis, dass kleine Zeitwerte die Genauigkeit der Messung beeinträchtigen könnten.

wurde verzichtet, um den Startpunkt des Blickverlaufes nicht zu beeinflussen. In Abbildung 8.2 wird das Prozedere ausschnittsweise illustriert. Der gesamte Verlauf dieses Versuchs inklusive der Instruktionen des Untersuchungsleiters wurde im Anhang ab S. 23 im elektronischen Zusatzmaterial tabellarisch aufbereitet.

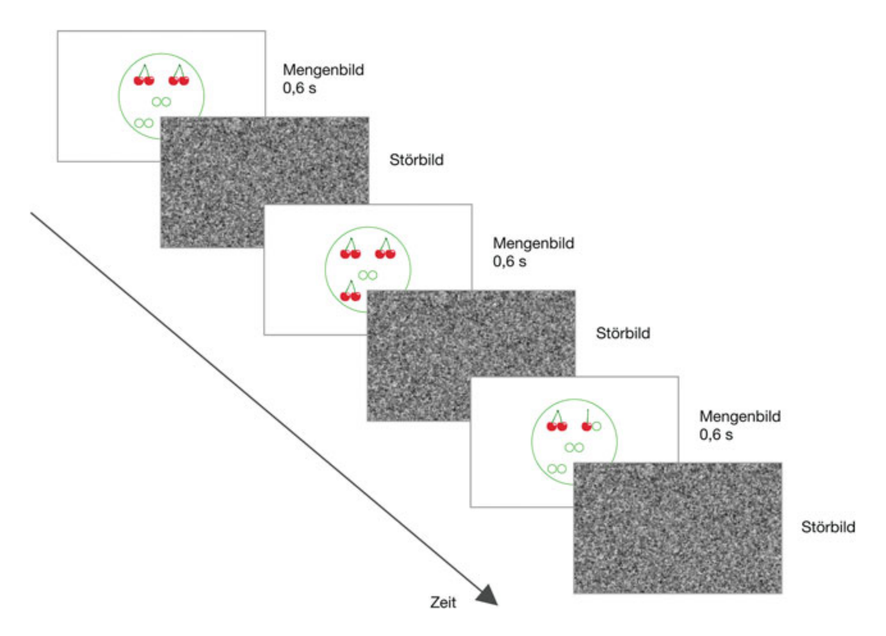


Abbildung 8.2 Ausschnitt aus dem Versuchsablauf. Die Anzeigedauer der Störbilder ist variabel

8.3.4 Analyse der Ergebnisse

8.3.4.1 Antwortverhalten: Korrekte Bezeichnung des Mengenbildes

Obwohl den Untersuchungspersonen die mathildr-Mengenbilder zuvor nicht bekannt waren, konnten sie diese in 85,2 % der Fälle korrekt benennen. Die Summe der Fehlantworten aller Untersuchungspersonen im ersten Durchgang betrug 27. Im zweiten Durchgang kam es lediglich zu 22 Fehlantworten. Diese Beobachtung lässt darauf schließen, dass sich die Untersuchungspersonen das mathildr-System im Laufe der Untersuchung erschlossen und eingeprägt haben.

8.3.4.2 Analyse von Anzahl und Dauer der Fixationen

In Anlehnung an das experimentelle Vorgehen von Moeller, Neuburger, Kaufmann et al. (2009) wurden die Fixationsdauer und die Anzahl der Fixationen der Mengenbilder auf Auffälligkeiten untersucht. Es wurde in Betracht gezogen, dass sich diese Variablen ggf. im ersten Durchgang, in dem die Untersuchungspersonen auf die für sie fremden Mengendarstellungen blicken, vom zweiten Durchgang unterscheiden.

Während jeder Mengenbildpräsentation bei jeder Untersuchungsperson wurden die Fixationen gemessen. Tabelle 8.1 stellt die Durchschnittswerte aller Untersuchungspersonen aus 420 Messungen gegenüber. 20 Messungen waren fehlerhaft und wurden vor der Auswertung aussortiert.

Tabelle 8.1 Durchschnittliche Anzahl der Fixationen je Mengenbild pro Person, durchschnittliche Dauer einer Fixation und durchschnittliche Dauer aller Fixationen je Mengenbild pro Person im Überblick, gerundet

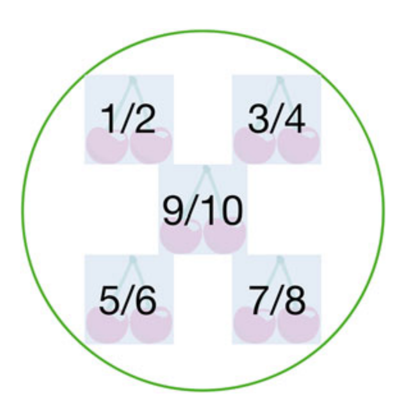
	Durchgang 1	Durchgang 2
∅ Anzahl Fixationen	2,72	2,67
∅ Dauer einzelner Fixationen in s	0,21	0,21
∅ Dauer aller Fixationen in s	0,58	0,56

In beiden Durchgängen zeigten die Untersuchungspersonen zwei bis drei Fixationen pro Mengenbild. Eine Fixation dauerte dabei im Durchschnitt 0,21 s. Alle Fixationen pro Mengenbild dauerten zusammen durchschnittlich 0,58 s in Durchgang 1 und 0,56 s in Durchgang 2. In Anbetracht der Präsentationsdauer von 0,6 s pro Mengenbild wird deutlich, dass fast die komplette Zeit auf das Mengenbild geblickt wurde. In dieser kurzen Zeitspanne haben die Untersuchungspersonen unabhängig vom Mengenbild und davon, ob sie das System bereits verinnerlicht hatten, offenbar so viele Fixationen wie möglich vollzogen bzw. ihre Fixationen so lange wie möglich gehalten. Die Parameter *Anzahl* und *Dauer von Fixationen* sind (in diesem Versuchsaufbau) deshalb nicht geeignet, um die Internalisierung von Mengenbildern abzubilden. Die Zählung von Fixationen und die Messung ihrer Dauer wurde verworfen, weil sie bedingt durch den Versuchsaufbau keine abhängige Variable darstellen und nicht zur Beantwortung der Fragestellung beitragen.

8.3.4.3 Vorüberlegungen zur Analyse der Daten von bildgebenden Eye-Tracking-Verfahren

Eye-Tracking-Daten gelten als anfällig und enthalten häufig Störungen (Pfeiffer & Weidner, 2013, S. 189). Erfahrungsgemäß kommt es vor, dass sie besonders in der Betrachtung eines individuellen Blickverlaufes durch Messungenauigkeiten leicht vom tatsächlichen Blickpunkt abweichen. Bei der Beschreibung von Blickverläufen auf den mathildr-Mengenbildern ergibt sich das Problem, dass die wesentlichen Elemente, die Kirschen und Ringe, sehr nah beieinanderliegen und Blickdaten daher bereits missinterpretiert werden könnten, wenn sie um wenige Millimeter vom tatsächlichen Blickverlauf abweichen. Um diesen Effekt zu minimieren, wurde eine Einteilung des Mengenbildes vorgenommen, die Fehlinterpretationen aufgrund von Messungenauigkeiten oder einer fehlerhaften Kalibrierung des Eyetrackers entgegenwirkt: Das Mengenbild wird für die folgenden Auswertungen in fünf Bereiche gegliedert, die sich an den Kirschpaaren orientieren. Diese Bereiche werden im Folgenden nach der Zählreihenfolge der Kirschen bezeichnet, die sie beinhalten können. Der Platz des ersten Kirschpaars wird demnach als 1/2 bezeichnet, der des zweiten Kirschpaars als 3/4 (Abbildung 8.3).

Abbildung 8.3
Bezeichnung der Bereiche im Zehnerfeld



Bei der Darstellungsmethode *Gaze Plots* werden Blickverläufe einer Einzelperson dargestellt. Diese bestehen aus Fixationen (dargestellt als Kreise) und Sakkaden (dargestellt als Linien). Treten einzelne Fixationen zwischen zwei Bereichen oder in der Nähe eines Bereiches auf, wurde die Fixation in der Auswertung dem Bereich zugeordnet, dem sie am nächsten war. Im folgenden Beispiel wurde nur eine Fixation aufgezeichnet. Sie wurde dem Bereich 7/8 zugeordnet, da sie diesem am nächsten ist (Abbildung 8.4).

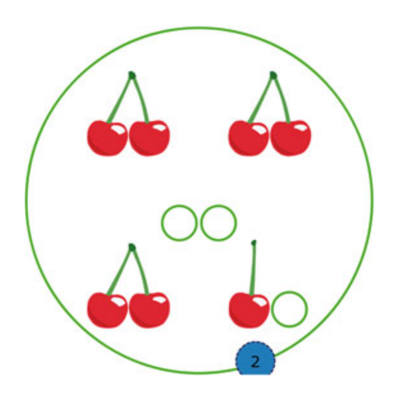


Abbildung 8.4
Mengenbild 7 mit Fixation, Untersuchungsperson O

8.3.4.4 Analyse der Fixationen durch Heat Maps

In Abbildung 8.5 sind die Mengenbilder 0 bis 10 zu sehen. Sog. Heat Maps stellen die kumulierten Fixationen des jeweils zweiten Durchgangs aller Untersuchungspersonen dar, die die Mengenbilder korrekt interpretiert haben. Bereiche, in denen durchschnittlich nur wenige Fixationen auftraten, sind grün eingefärbt. Gelbe Färbungen deuten auf eine mäßige Anzahl an Fixationen hin. Ist ein Bereich rot eingefärbt, bedeutet dies, dass dort viele Blickpunkte der Untersuchungspersonen aufeinandertrafen. Unter jedem Bild ist die Anzahl n der kumulierten Untersuchungsdaten aufgeführt. Diese variiert zwischen 15 und 20, weil lediglich die Untersuchungsdaten von korrekten Anzahlnennungen in diesen Darstellungen verwendet wurden.

Die Mengenbilder 0 bis 4 wurden von allen Untersuchungspersonen korrekt benannt. Dieses Ergebnis entspricht den Erwartungen, da ihr Aufmerksamkeitsumfang die Verarbeitung von vier Chunks ermöglicht (vgl. Unterkapitel 2.6.2). Die Heat Maps lassen erkennen, dass eine Fokussierung bei den Mengenbildern 1 bis 4 jeweils auf Bereiche erfolgt, die die Kirsche mit dem höchsten Wert beinhalten. Beim Mengenbild der 4 wird im Bereich 3/4 mit Tendenz zur dritten Kirsche fokussiert. Dies scheint auszureichen, um zu erkennen, dass es sich nicht um eine Einzelkirsche, sondern um ein Kirschpaar handelt. Die Mengenbilder 9 und 10 werden ebenfalls anhand der Kirschen im Bereich 9/10 identifiziert. Bei den Mengenbildern 5 bis 8 sind die Fixationen über die gesamten dargestellten Kirschen verteilt. Das Mengenbild 0 wird offenbar anhand des Bereiches 1/2 identifiziert, da hier viele Fixationen aufeinandertreffen.

Aus der Analyse der Heat Maps geht hervor, dass zur Identifizierung der korrekten Anzahl der Kirschen eines Mengenbildes die Fixation auf den Bereich des

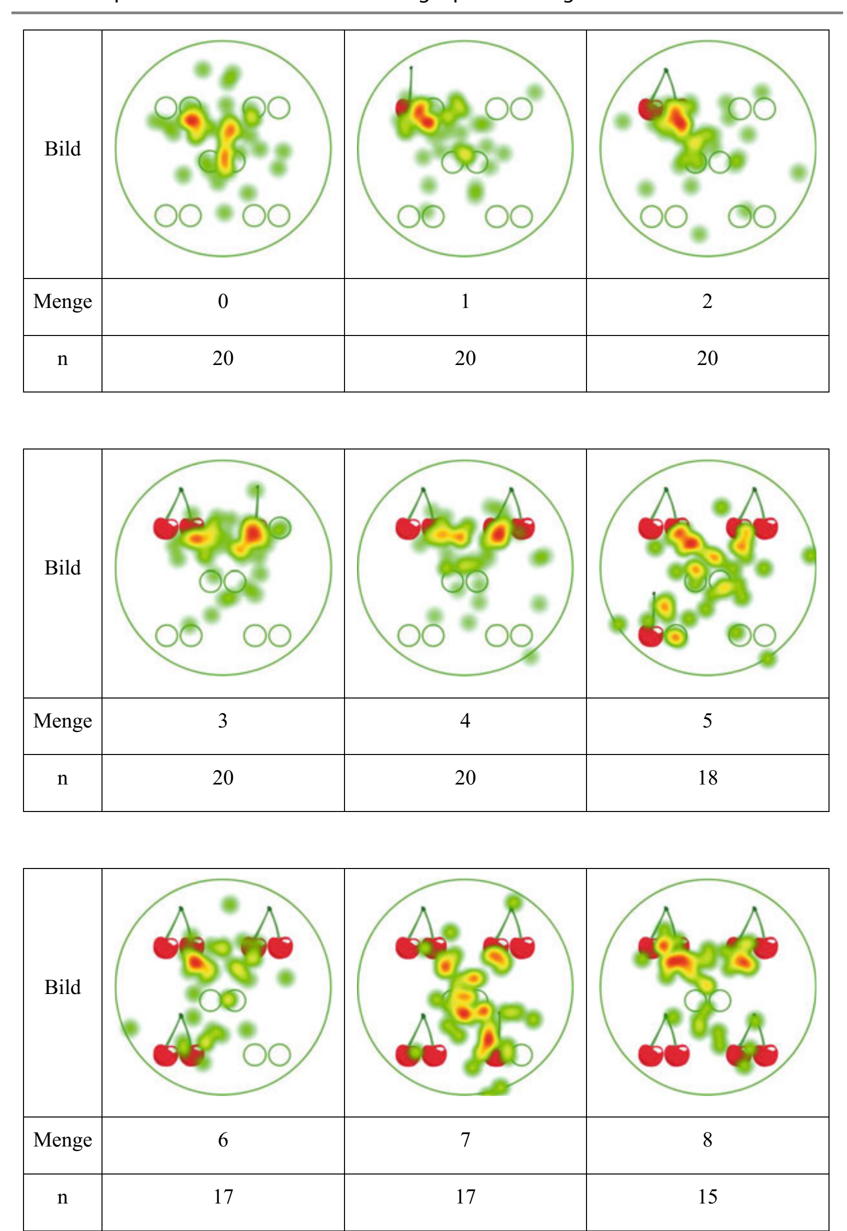


Bild			
Menge	0	1	2
n	20	20	20

Bild			
Menge	3	4	5
n	20	20	18

Bild			
Menge	6	7	8
n	17	17	15

Abbildung 8.5 Kumulierte Fixationen der Untersuchungspersonen im zweiten Durchgang, bei korrekter Identifizierung des Mengenbilds, durch Heat Maps dargestellt

Bild		
Menge	9	10
n	15	16

Abbildung 8.5 (Fortsetzung)

Mengenbildes, der die Kirsche mit dem höchsten Wert beinhaltet, eine erhebliche Rolle spielt. Rückschlüsse über Blickverläufe, also das zeitlich eingeordnete Auftreten von Fixationen und Sakkaden, lassen diese kumulierten Blickdaten allerdings nicht zu.

8.3.4.5 Analyse der Blickmuster eines Untersuchungsteilnehmenden durch Gaze Plots

Um Blickverläufe in ihrem zeitlichen Ablauf sichtbar zu machen, wird die Darstellungsweise *Gaze Plots* verwendet. Diese erlaubt die Visualisierung der Sakkaden und Fixationen einer einzelnen Untersuchungsperson. Die Fixationen sind der Reihenfolge nach nummeriert, ihre Größen entsprechen der relativen Fixationsdauer. Die erste Fixation und die Landing Position weisen einen gestrichelten Rand auf.

Im Folgenden werden exemplarisch die Ergebnisse eines Schülers (Untersuchungsperson A) im Alter von 10;4 Jahren dargestellt. Dieser konnte in beiden Durchgängen alle Mengenbilder korrekt identifizieren, obwohl er sie zuvor noch nie gesehen hatte. Im zweiten Durchgang nannte er die Anzahl der Kirschen eines jeden Mengenbildes direkt nach Erscheinen und ohne sich viel Zeit zum Überlegen zu nehmen. Daher ist davon auszugehen, dass er die Struktur der Mengenbilder im Verlauf des ersten Durchgangs gelernt hat. Dargestellt werden hier alle Blickbewegungen des zweiten Durchgangs (Abbildung 8.6).

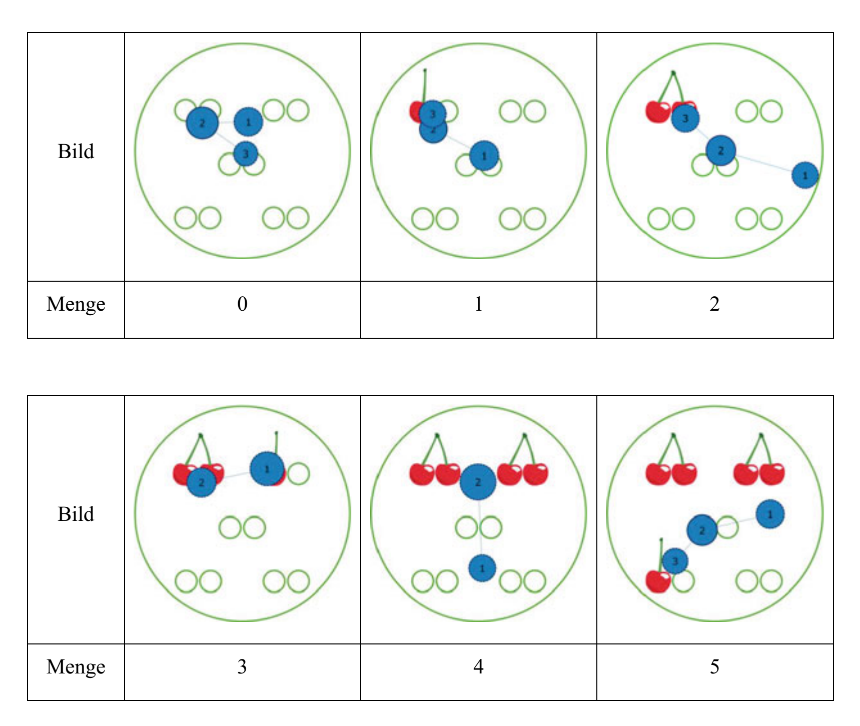


Abbildung 8.6 Gaze-Plot-Darstellung der Blickverläufe von Untersuchungsperson A im zweiten Durchgang der Untersuchung

Bei den Mengenbildern 1, 2, 5, 7, 9 und 10 lassen sich Fixationen auf die Ordnungsplätze mit den Kirschen der höchsten Ordnungszahl erkennen. Im Fall des Mengenbildes 6 ist eine Fixation nahe des Bereiches 5/6 zu erkennen. Auffällig ist, dass diese Fixationen bei den Mengenbildern 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9 und 10 die Landing Position, also die letzte Fixation darstellen. Diese Beobachtung steht im Einklang mit der Erkenntnis von Schneider und Deubel (1996, S. 1834), wonach die Landing Position maßgeblich für die erfolgreiche Identifizierung eines Objekts verantwortlich ist.

Ein Nachweis der Landing Position im Bereich mit der Kirsche mit der höchsten Ordnungszahl ist demnach ein Indikator dafür, dass die Untersuchungsperson das Mengenbild mit einer Erwartungshaltung betrachtet und wiedererkennt bzw. identifiziert.

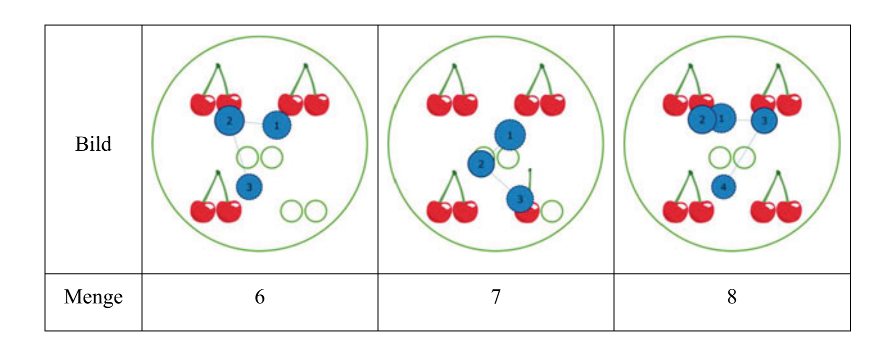


Bild			
Menge	6	7	8

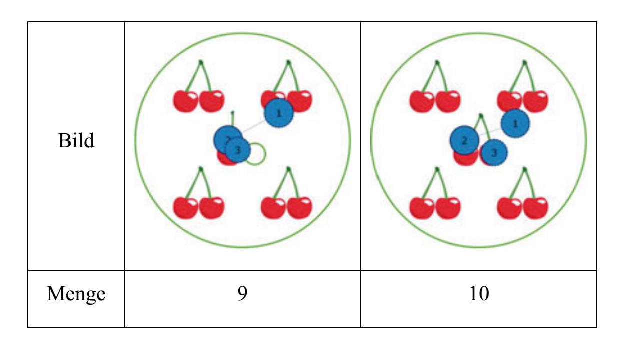


Bild		
Menge	9	10

Abbildung 8.6 (Fortsetzung)

Neben der Beobachtung, welche Elemente des Mengenbildes von Sakkaden und Fixationen betroffen sind, interessiert bei der Analyse der Blickbewegungen auch, welche Elemente nicht betroffen sind: Bei den Mengenbildern 2, 4, 5, 7, 8, 9 und 10 wurden nicht alle Ordnungsplätze durch Fixationen markiert oder Sakkaden gestreift. Dass der Schüler dennoch die richtige Anzahl benennen konnte, ist ein Indikator dafür, dass dieser die Kirschen nicht zählen musste, sondern den Aufbau der Mengenbilder verstanden hat. Beim Mengenbild der 10 blickt er beispielsweise von unterhalb der dritten Kirsche auf die neunte und danach zehnte Kirsche. Er benennt das Mengenbild korrekt, ohne die Ordnungsplätze 1/2, 5/6 und 7/8 direkt zu betrachten.

8.3.4.6 Analyse der Blickmuster zum Mengenbild 7 durch Gaze Plots

8.3.4.6.1 Vorüberlegungen zur Analyse

Um der Frage nachzugehen, ob auch die Blickverläufe der anderen Untersuchungspersonen diese Merkmale aufweisen, könnten insgesamt 440 Blickverläufe aller Untersuchungspersonen analysiert werden. Tatsächlich deutet eine stichprobenhafte Begutachtung der Daten auch darauf hin, dass ein Blickverlauf mit den o. g. Merkmalen gehäuft zu finden ist.

Allerdings kann die Anzahl der zu analysierenden Blickverläufe reduziert werden, wenn der Nachweis des Blickverlaufes bereits bei einem ausgewählten Mengenbild gelingt: Das Mengenbild der 7 eignen sich die meisten Lernenden erfahrungsgemäß zuletzt an. Da der Aufmerksamkeitsumfang der neurotypischen Untersuchungspersonen vier Elemente beträgt, kann die korrekte Identifizierung des Mengenbilds 7 als Indikator dafür herangezogen werden, dass sie das System verstanden haben. Weitere Indikatoren könnten folgende Charakteristika des Blickverlaufs sein:

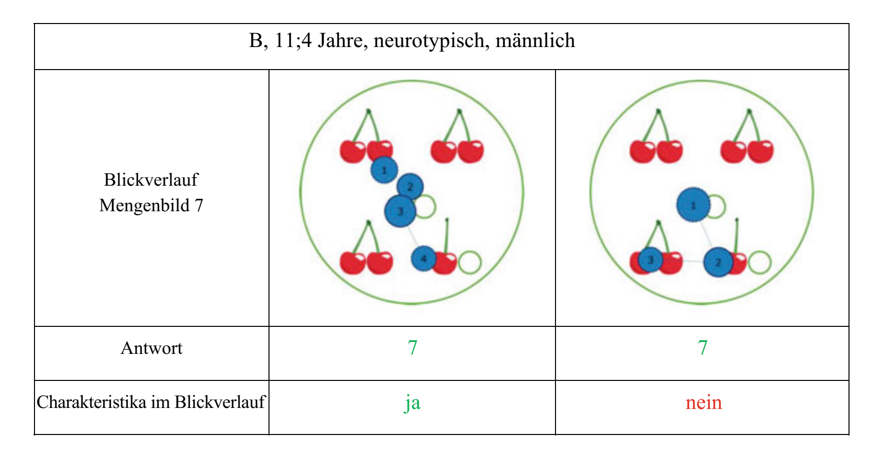
Charakteristikum 1: *Die Landing Position befindet sich im Bereich 7/8.* Die Blickverläufe von Untersuchungspersonen, die das mathildr-System verinnerlicht haben, müssten häufig die Landing Position in diesem Bereich aufweisen, da dieser für die Interpretation des Mengenbildes maßgeblich ist.

Charakteristikum 2: *Nicht alle Bereiche des Mengenbildes, die Kirschen enthalten, sind von Fixationen oder Sakkaden betroffen.* Ist der Aufbau der Mengenbilder internalisiert, ist es nicht notwendig, sich mit Hilfe mehrerer Fixationen und Sakkaden ein vollständiges Bild zu machen, um das Mengenbild zu interpretieren.

Die Blickverläufe aller Untersuchungspersonen wurden analysiert, um zu überprüfen, ob diese Charakteristika tatsächlich vermehrt auftreten. In Abbildung 8.7 werden beispielhaft die Blickverläufe der Untersuchungspersonen A und B gezeigt. Eine vollständige Darstellung aller Analysen findet sich im Anhang, ab S. 33 im elektronischen Zusatzmaterial. Es werden jeweils die Blickverläufe des ersten (links) und des zweiten Durchgangs (rechts) dargestellt.

Untersuchungsperson A nannte in beiden Durchgängen die korrekte Anzahl des Mengenbildes, ihr Blickmuster weist die beiden Charakteristika auf. Untersuchungsperson B gab ebenfalls in beiden Durchgängen die korrekte Anzahl des Mengenbildes an. Beim zweiten Durchgang zeigte sie ein alternatives Blickmuster, mit dem sie aber ebenfalls erfolgreich war. Hier ist die Landing Position entgegen der Erwartung im Bereich 5/6 zu finden. Der Bereich 7/8 wird dennoch zur Identifizierung des Mengenbildes berücksichtigt.

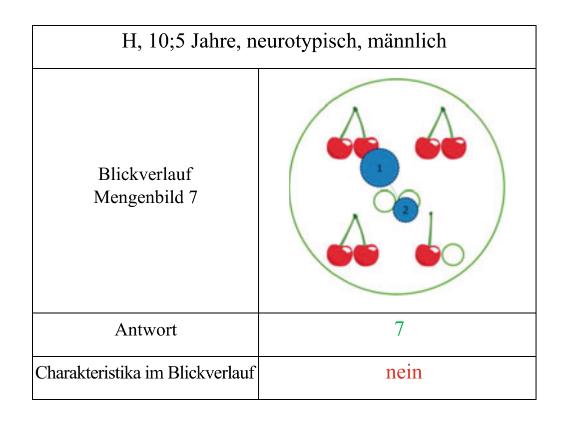
A, 10;7 Jahre, neurotypisch, männlich		
Blickverlauf Mengenbild 7		
Antwort	7	7
Charakteristika im Blickverlauf	ja	ja



B, 11;4 Jahre, neurotypisch, männlich		
Blickverlauf Mengenbild 7		
Antwort	7	7
Charakteristika im Blickverlauf	ja	nein

Abbildung 8.7 Gaze-Plot-Darstellung der Blickverläufe zum Mengenbild 7 von den Untersuchungspersonen A und B im ersten und zweiten Durchgang der Untersuchung

Aufgrund der zuvor benannten Störungen und Verschiebungen, die in Blickdaten regelmäßig auftreten, war es teilweise notwendig, Fixationen, die zwischen zwei Bereichen auftraten, dem Bereich zuzuordnen, dem sie am nächsten sind. Dabei wurde bei Uneindeutigkeit grundsätzlich zu Ungunsten der Charakteristika entschieden, wie das folgende Beispiel des ersten Durchgangs bei Untersuchungsperson H zeigt (Abbildung 8.8).



H, 10;5 Jahre, neurotypisch, männlich	
Blickverlauf Mengenbild 7	
Antwort	7
Charakteristika im Blickverlauf	nein

Abbildung 8.8 Gaze-Plot-Darstellung des Blickverlaufs zum Mengenbild 7 der Untersuchungsperson H im ersten Durchgang der Untersuchung

Obwohl eine scheinbare Tendenz zum Bereich 7/8 besteht, wurde sich zugunsten der Validität der vorexperimentellen Versuchsanordnung gegen diese Zuordnung entschieden.

8.3.4.6.2 Auswertung

Tabelle 8.2 fasst die Analyseergebnisse aller 20 Untersuchungspersonen zusammen. Zu jeder Untersuchungsperson wird die absolute Anzahl korrekter Antworten (also Identifizierungen der Darstellung als Menge 7) angegeben. Daneben sind die absoluten Häufigkeiten des Auftretens der Charakteristika verzeichnet: grundsätzlich, in Verbindung mit einer korrekten Antwort und in Verbindung mit einer falschen Antwort. Da das Mengenbild zweimal gezeigt wurde, beträgt der höchstmögliche Wert in jeder Zelle 2.

Von 32 korrekten Anzahlnennungen steht die Hälfte (16) in Verbindung mit den beiden Charakteristika im Blickverlauf. Werden die Charakteristika im Einzelnen betrachtet, lässt sich feststellen, dass die Landing Position bei korrekter Antwort gehäuft im Bereich 7/8 auftritt (Tabelle 8.3).

Auf den Bereich 7/8, der mit der Hälfte der Fälle am häufigsten die Landing Position aufweist, folgt der Bereich 3/4 mit einem Viertel der Fälle. Die Landing Position ist also für die korrekte Benennung des Mengenbildes nicht maßgeblich, steht aber in der Hälfte der Fälle damit in Zusammenhang.

Das Charakteristikum 2, das dadurch definiert ist, dass nicht alle Bereiche des Mengenbildes, die Kirschen enthalten, von Fixationen und Sakkaden betroffen sind, trat einmalig nicht auf (Untersuchungsperson C, zweiter Durchgang).

Tabelle 8.2 Übersicht der analysierten Blickverläufe zum Mengenbild der 7 und zum Antwortverhalten der Untersuchungspersonen. Angegeben ist die absolute Anzahl korrekter Anzahlnennungen, des Auftretens der Charakteristika im Blickverlauf, des Auftretens der Charakteristika bei korrekter Anzahlnennung und des Auftretens der Charakteristika bei fehlerhafter Anzahlnennung, N = 20

Untersuchungsperson	korrekte Antworten	Charakteristika		
		nachweisbar	nachweisbar, korrekte Antwort	nachweisbar, falsche Antwort
A	2	2	2	0
B	2	1	1	0
C	1	0	0	0
D	2	0	0	0
E	1	2	1	1
F	2	1	1	0
G	1	1	1	0
H	2	0	0	0
I	2	1	1	0
J	2	1	1	0
K	1	1	0	1
L	2	1	1	0
M	2	0	0	0
N	2	2	2	0
O	2	1	1	0
P	1	1	1	0
Q	1	2	1	1
R	2	0	0	0
S	2	2	2	0
T	0	1	0	1
Gesamt	**32**	**20**	**16**	**4**

Tabelle 8.3 Häufigkeit des Auftretens der Landing Position in den festgesetzten Bereichen des Mengenbildes 7 bei gleichzeitiger korrekter Benennung des Mengenbildes, N = 19

Bereich	1/2	¾	5/6	7/8	9/10
Häufigkeit	1	8	1	16	6

Neben den 16 Fällen, in denen die Charakteristika beobachtbar waren und gleichzeitig die korrekte Anzahl der Menge genannt wurde, traten die Charakteristika außerdem bei vier Messungen auf, bei denen nicht *7* als Anzahl genannt wurde:

- Die Blickverläufe der Untersuchungspersonen **E** und **K** weisen die Charakteristika auf, obwohl die Untersuchungspersonen im ersten Durchgang die Antwort „6“ gaben, bevor sie im zweiten Durchgang die korrekte Anzahl nannten.
- Die Untersuchungsperson **Q** bezeichnete die Anzahl im ersten Durchgang als „8“ und im zweiten ebenfalls korrekt als „*7*“. In den Blickmustern beider Durchgänge lassen sich die Charakteristika nachweisen.
- Die Untersuchungsperson **T** hingegen gab im ersten Durchgang die Antwort „5“, im zweiten die Antwort „10“. Das Blickmuster des ersten Durchgangs weist dabei die Charakteristika auf. Mit insgesamt sechs Fehlantworten während des gesamten Versuchs sind der Untersuchungsperson T im Vergleich die meisten Fehler unterlaufen.

Diese Beispiele verdeutlichen, dass ein Blickmuster, das die definierten Charakteristika aufweist, allein nicht ausreicht, um die Internalisierung der Mengenbilder zu belegen. Daher muss in der Formulierung der abhängigen Variable darüber hinaus das korrekte Antwortverhalten mitberücksichtigt werden.

8.3.5 Interpretation

Die Analyse der Blickmuster belegt, dass unterschiedlich charakterisierte Blickmuster zum korrekten Ergebnis führen können. Der beschriebene Blickverlauf, der zwei spezifische Charakteristika beinhaltet, tritt mit 16 Vorkommnissen aber am häufigsten bei korrekter Antwortgabe auf und ist in Kombination mit der korrekten Anzahlnennung ein hinreichender Hinweis darauf, dass eine mentale Vorstellung des mathildr-Systems vorhanden ist. Die Frage *„Wie lässt sich durch Unterstützung von Eye-Tracking feststellen, ob eine Untersuchungsperson eine mentale Vorstellung des mathildr-Systems entwickelt hat?“* kann nun folgendermaßen beantwortet werden:

Eine Analyse des Blickverlaufes nach 0,6-sekündiger Präsentation des Mengenbildes 7 erlaubt Rückschlüsse darauf, ob eine Untersuchungsperson das mathildr-System internalisiert hat. Benennt diese das Mengenbild korrekt und weist ihr

Blickverlauf die folgenden Charakteristika auf, ist von einer mentalen Vorstellung auszugehen:

1. *Die Landing Position befindet sich im Bereich 7/8.*
2. *Nicht alle Bereiche des Mengenbildes, in denen sich Kirschen befinden, sind von Fixationen oder Sakkaden betroffen.*

Diese abhängige Variable wird im Folgenden als *Charakteristika im Blickverlauf und korrektes Antwortverhalten* bezeichnet.

8.3.6 Diskussion

Der Blickverlauf, der die beiden Charakteristika aufweist, ist nicht die einzige Form der Blickbewegung, die eine erfolgreiche Identifikation des Mengenbildes 7 ermöglicht. Allerdings tritt sie in der vorexperimentellen Versuchsanordnung bei neurotypischen Personen, die das mathildr-System verstanden haben, gehäuft auf und ist ein Hinweis darauf, dass das Mengenbild erkannt wurde und internalisiert ist.

Im Gegensatz zum reinen Abfragen der Mengenbilder, dessen Ergebnisse nur die Analyse einer Außensicht zulassen, gelingt auf diese Weise die Abbildung eines Teils der Innensicht (Abbildung 8.9).

Außensicht	Das Mengenbild 7 wird erkannt.
Innensicht	Einige Bereiche mit Kirschen sind weder von Fixationen noch von Sakkaden betroffen.
	Die Landing Position des Blickverlaufs befindet sich im Bereich 7/8.

Abbildung 8.9 Zuordnung der ermittelten Indikatoren zur Außen- und Innensicht

Mithilfe dieser Untersuchung wurden drei Indikatoren gefunden, die bei simultanem Auftreten Rückschlüsse auf eine erfolgreiche Internalisierung der mathildr-Mengenbilder ermöglichen. Da sich Sakkaden nicht manipulieren lassen und Fixationen nicht willkürlich sind, sondern Interesting Spots darstellen, liegt es nahe, dass Menschen, die keine Vorstellung von den mathildr-Mengenbildern entwickelt haben, bei ihrem Anblick andere Blickbewegungen aufweisen. Die

ermittelte abhängige Variable ermöglicht daher ein Quasi-Experiment, bei dem geprüft wird, ob Personen mit Trisomie 21, die regelmäßig mit mathildr gearbeitet haben, Mengenbilder internalisiert haben.

8.4 Kalkulation

Die vorexperimentelle Versuchsanordnung hat ergeben, dass neurotypische Untersuchungspersonen, die das mathildr-System verstanden haben, bei der erfolgreichen Identifizierung des Mengenbilds 7 vermehrt ein spezifisches Blickmuster zeigen. Da die Zeit nicht ausreicht, die Menge 7 nachzuzählen und diese zu groß ist, um simultan erfasst zu werden, hilft es den Untersuchungspersonen, gezielt auf die Position 7/8 zu blicken. So können sie überprüfen, ob es sich um ein Paar oder eine Kirsche und damit um die Menge 7 oder 8 handelt. Könnte dieses spezifische Blickmuster bei korrektem Antwortverhalten auch bei Personen mit Trisomie 21 nachgewiesen werden, wäre dies der empirische Beleg dafür, dass sie eine Vorstellung von dem mathildr-System entwickelt haben. Die Kalkulation lautet demnach: *Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 haben das Mengenbild der 7 internalisiert, wenn sie unter gleichen Versuchsbedingungen das Mengenbild korrekt identifizieren und das gleiche Blickmuster zeigen wie neurotypische Personen.* Im folgenden Quasi-Experiment wird das Auftreten dieses Blickmusters bei Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 überprüft, die im Unterricht mit mathildr gearbeitet haben. Die Kontrollgruppe bilden Personen mit Trisomie 21, die zuvor nicht mit mathildr-Lernmaterialien in Berührung gekommen sind.

8.5 Quasi-Experiment: Internalisierung des mathildr-Systems bei Trisomie 21

Bei dieser empirischen Untersuchung handelt es sich nicht um ein reines Laborexperiment, da die Bedingung der Randomisierung nicht erfüllt wird. Hager definiert eine Untersuchung dann als Experiment, „wenn die gleichen Sachverhalte unter verschiedenen Bedingungen … systematisch beobachtet werden und wenn Probanden und Bedingungen einander zufällig zugeordnet werden bzw., wenn die Pbn [Proband*innen, Anm. TR] und die Reihenfolgen, in denen sie unter den Bedingungen … systematisch beobachtet werden, einander zufällig zugeordnet werden“ (1987, S. 71).

Im vorliegenden Quasi-Experiment lautet die unabhängige Variable: *Bekanntheit der mathildr-Mengenbilder durch Unterricht.* Die Kontrollgruppe umfasst

Personen, die zuvor keinen Unterricht mit dem mathildr-Lernmaterial erhalten hatten. Die Versuchsgruppe besteht aus Personen, die bereits zum Zeitpunkt ihrer Auswahl Lernerfahrungen mit dem mathildr-Lernmaterial gesammelt hatten. Eine Randomisierung fand nicht statt, da die Einteilung in Versuchs- und Kontrollgruppe auf der Grundlage des zuvor erlebten Mathematikunterrichts jeder Untersuchungsperson beruht. Um dennoch eine Vergleichbarkeit von Versuchs- und Kontrollgruppe sowie eine interne Validität zu gewährleisten, wurde eine Parallelisierung (Matching) durch den Einsatz eines Intelligenztests vorgenommen.

8.5.1 Hypothese

Dieses Quasi-Experiment untersucht, ob sich Personen mit Simultandysgnosie die mathildr-Mengenbilder einprägen und eine mentale Vorstellung von ihnen entwickeln können. Die These dieses Quasi-Experiments lautet:

Die identifizierten Indikatoren einer Internalisierung der Mengenbilder treten bei Personen mit Trisomie 21, die bereits mit mathildr gearbeitet haben, signifikant häufiger auf als bei Personen mit Trisomie 21, denen das System zuvor nicht bekannt war.
Die unabhängige Variable *Bekanntheit der mathildr-Mengenbilder durch Unterricht* steht laut dieser Hypothese im direkten Zusammenhang mit der abhängigen Variable *Charakteristika im Blickverlauf und korrektes Antwortverhalten.*

Sollten Personen der Versuchsgruppe das Mengenbild der 7 korrekt benennen und dabei Blickverläufe mit den gleichen Charakteristika aufweisen, die zuvor bei den neurotypischen Untersuchungspersonen identifiziert worden sind, ist davon auszugehen, dass sie das mathildr-System internalisiert haben. Dies würde die Eignung des Systems zur Entwicklung mentaler Mengenbilder bei Simultandysgnosie belegen. Um auszuschließen, dass es sich um zufällige Ergebnisse handelt, die unabhängig vom Lernen mit dem mathildr-Lernmaterial erreicht werden können, wird die Versuchsreihe ebenfalls mit einer Kontrollgruppe durchgeführt, die gegenüber der Versuchsgruppe im mentalen wie im physischen Alter nicht benachteiligt sein darf.

8.5.2 Stichprobe

Um an der Untersuchung teilzunehmen, mussten folgende Grundvoraussetzung erfüllt werden:

1. Die Untersuchungsperson lebt unter den Bedingungen einer Trisomie 21.
2. Die Untersuchungsperson kann Mengen bis 10 korrekt nachzählen.

Die Versuchsgruppe bildeten 18 Personen mit Trisomie 21, die das mathildr-System mindestens seit einem Monat kannten und damit in der Schule, Einzelförderung oder gemeinsam mit ihren Eltern zuhause gelernt haben. Dabei handelt es sich zur Hälfte um Untersuchungspersonen, deren Lernverlauf in dieser Arbeit bereits thematisiert wurde. Weitere Untersuchungspersonen besuchten Förderschulen und inklusiv unterrichtende Regelschulen, die das mathildr-System einsetzen. Neun dieser Untersuchungsperson waren weiblich, neun männlich. Die jüngsten Untersuchungspersonen waren zum Zeitpunkt der Untersuchung 8;2 Jahre alt, die älteste Teilnehmende war 20;2 Jahre alt. Das Durchschnittsalter der Versuchsgruppe betrug 12;4 Jahre. Die Daten zu den Blickbewegungen einer weiteren Untersuchungsperson konnten aufgrund von Messfehlern, die mutmaßlich auf eine Sehhilfe mit hoher Sehstärke zurückzuführen sind, nicht ausgewertet werden.

Mit allen Teilnehmenden wurde der Intelligenztest Coloured Progressive Matrices (CPM) durchgeführt, um neben dem Alter auch die kognitive Entwicklung zu berücksichtigen und dadurch eine Vergleichbarkeit zur Kontrollgruppe zu gewährleisten. Der niedrigste Rohwert, der hier erreicht wurde, betrug 10, der höchste 24 Punkte. Der Median aller CPM-Rohwerte in der Versuchsgruppe betrug 12,44 CPM.

Die Kontrollgruppe bildeten 18 Personen mit Trisomie 21, denen das mathildr-System unbekannt war. Sie setzte sich aus Schüler*innen von Förderschulen, inklusiv unterrichteten Schüler*innen und Erwachsenen zusammen, die noch nicht mit dem mathildr-System gearbeitet hatten. Zehn Untersuchungspersonen der Kontrollgruppe waren weiblich, acht männlich. Der jüngste Teilnehmende der Kontrollgruppe war 7;10 Jahre alt, die älteste Teilnehmende 23;8 Jahre. Das Durchschnittsalter der Gruppe betrug 14;9 Jahre. In der Kontrollgruppe befanden sich zwei weitere Untersuchungspersonen, deren Blickdaten zu viele Störungen enthielten, um sie auszuwerten. Der niedrigste CPM-Rohwert, der in der Kontrollgruppe erreicht wurde, betrug 9, der höchste 28. Der Median aller CPM-Rohwerte in der Kontrollgruppe betrug, wie bei der Versuchsgruppe, 12,44 CPM. Der Umstand, dass diese Mediane exakt gleich groß sind, ist dem Zufall geschuldet.

Es mussten keine Untersuchungspersonen von der Auswertung ausgeschlossen werden, um den gleichen Durchschnitt zu erhalten. Dank dieser natürlichen Parallelisierung der Kontroll- und Versuchsgruppe ist sichergestellt, dass ein Vergleich beider Gruppen vorgenommen werden kann. Zwar gibt es eine Differenz im Durchschnittsalter, der exakt gleiche CPM-Rohwert-Median zeigt allerdings, dass dennoch von einer sehr ähnlichen Ausprägung der kognitiven Entwicklung der Teilnehmenden ausgegangen werden kann. Sollte durch die Differenz im Durchschnittsalter eine Benachteiligung entstehen, beträfe diese die Versuchsgruppe, die durchschnittlich 2;5 Jahre jünger ist als die Kontrollgruppe.

8.5.3 Versuchsaufbau

In diesem Quasi-Experiment erfolgten Versuchsaufbau, -durchführung und -auswertung analog zur vorexperimentellen Versuchsanordnung (Abbildung 8.10). Bei der Analyse der Heat Maps und Gaze Plots zu den Mengenbildern galten die gleichen Konventionen, die zuvor entwickelt wurden.

8.5.4 Analyse der Ergebnisse

8.5.4.1 Antwortverhalten: Korrekte Bezeichnung der Mengenbilder

Auch in dieser Versuchsdurchführung wurden die Untersuchungsteilnehmenden darum gebeten, nach jeder Präsentation eines Mengenbildes die Anzahl der zuvor gezeigten Kirschen zu benennen. Die Versuchsgruppe gab in 90,15 % der Fälle eine korrekte Antwort. Die Kontrollgruppe interpretierte 24,85 % der Mengenbilder korrekt.

8.5.4.2 Analyse der Fixationen durch Heat Maps

Zur ersten Analyse der Daten wurden Heat Maps mit den kumulierten Blickverläufen der Untersuchungspersonen im zweiten Durchgang des Versuchs erstellt. Im Gegensatz zur Auswertung der vorexperimentellen Versuchsanordnung wurden hier alle Blickdaten berücksichtigt, also auch solche, die von Untersuchungsperson stammten, die die Mengenbilder nicht korrekt identifizierten. Auf diese Weise ließen sich mögliche Abweichungen zu den Heat Maps aus der vorexperimentellen Versuchsanordnung identifizieren und interpretieren. Abbildung 8.11 zeigt die Heat Maps der Versuchsgruppe.



Abbildung 8.10 Der Versuchsaufbau wurde an die Körpergröße der Untersuchungspersonen angepasst. Bei Bedarf wurden Kindermöbel verwendet, damit die Untersuchungsperson komfortabel sitzend mit optimalem Abstand auf den Bildschirm blicken konnte

Bei den Mengenbildern 1 bis 4 sowie 9 und 10 lassen sich deutliche Fokussierungen in den Bereichen der Kirschen mit dem höchsten Wert feststellen. Beim Mengenbild 0 ist eine Fokussierung auf den Bereich 1/2 zu erkennen. Bei den Mengenbildern 5 bis 8 sind die Fixationen verteilt. Diese Beobachtungen entsprechen denen, die zuvor bei der Analyse der Heat Maps der neurotypischen Untersuchungspersonen gemacht wurden (vgl. Abbildung 8.5). Die Positionen der Fixationen der Versuchsgruppe gleichen denen der Gruppe neurotypischer Untersuchungspersonen, die das mathildr-System verstanden und Mengenbilder verinnerlicht haben. Da die Versuchsgruppe in 90,15 % der Fälle die Mengenbilder korrekt benannt hat, entspricht diese Beobachtung den Erwartungen.

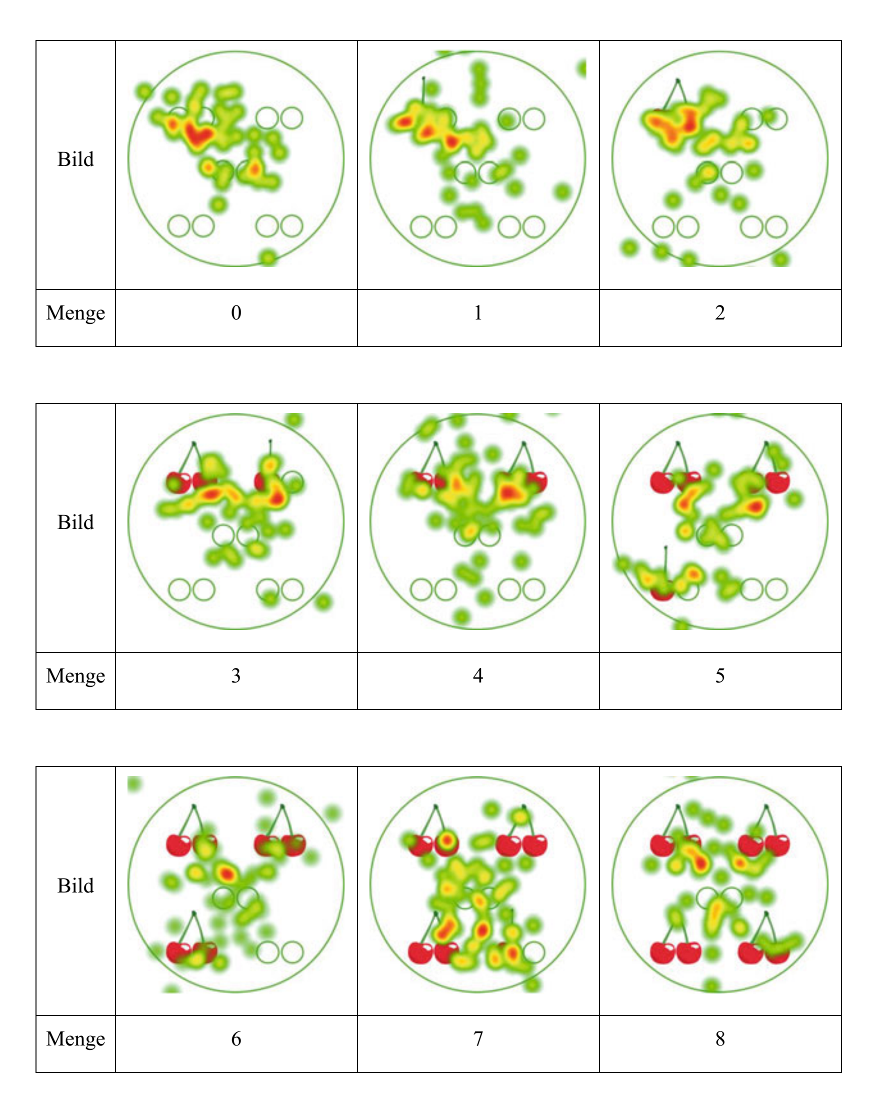


Abbildung 8.11 Kumulierte Fixationen der Versuchsgruppe (n = 18) im zweiten Durchgang, durch Heat Maps dargestellt

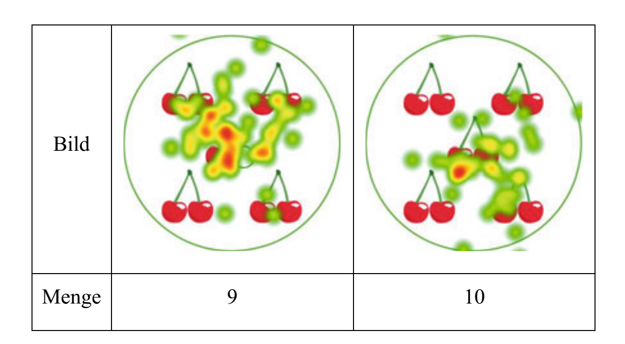


Bild		
Menge	9	10

Abbildung 8.11 (Fortsetzung)

In Abbildung 8.12 sind die Heat-Map-Darstellungen der Fixationen der Kontrollgruppe im zweiten Durchgang des Quasi-Experiments ersichtlich.

Bei den Mengen 1 bis 4 sowie 9 und 10 ist eine Tendenz zur Orientierung zum Bereich mit den Kirschen mit den höchsten Zahlen zu erkennen. Die Fixationen sind aber nicht eindeutig zuzuordnen. Insgesamt sind die Fixationen auf den Heat Maps der Kontrollgruppe deutlich stärker verteilt als bei der Versuchsgruppe. Diese Blickdaten bieten eine gute Erklärung für das Antwortverhalten der Kontrollgruppe, die lediglich 24,85 % der Mengenbilder korrekt interpretierte. Offensichtlich wurde das System der Mengenbilder nur partiell verstanden und deshalb wiederholt fehlerhaft interpretiert. In Abbildung 8.13 wurden die Heat Maps des Mengenbildes 3 der verschiedenen Gruppen gegenübergestellt.

Im direkten Vergleich wird deutlich, dass die Heat Maps der neurotypischen Gruppe aus der vorexperimentellen Versuchsanordnung der Versuchsgruppe im Quasi-Experiment ähneln. Viele Fixationen konzentrieren sich auf die Bereiche 1/2 und 3/4. In der Kontrollgruppe sind diese Konzentrationen ebenfalls zu finden, allerdings verteilen sich weiter viele Fixationen über das gesamte Mengenbild, insbesondere in der Nähe des Bereichs 5/6. Dieser erste Vergleich der Fixationen lässt erkennen, dass sich die Fixationen der Versuchsgruppe deutlicher an denen der neurotypischen Untersuchungspersonen orientieren als die der Kontrollgruppe.

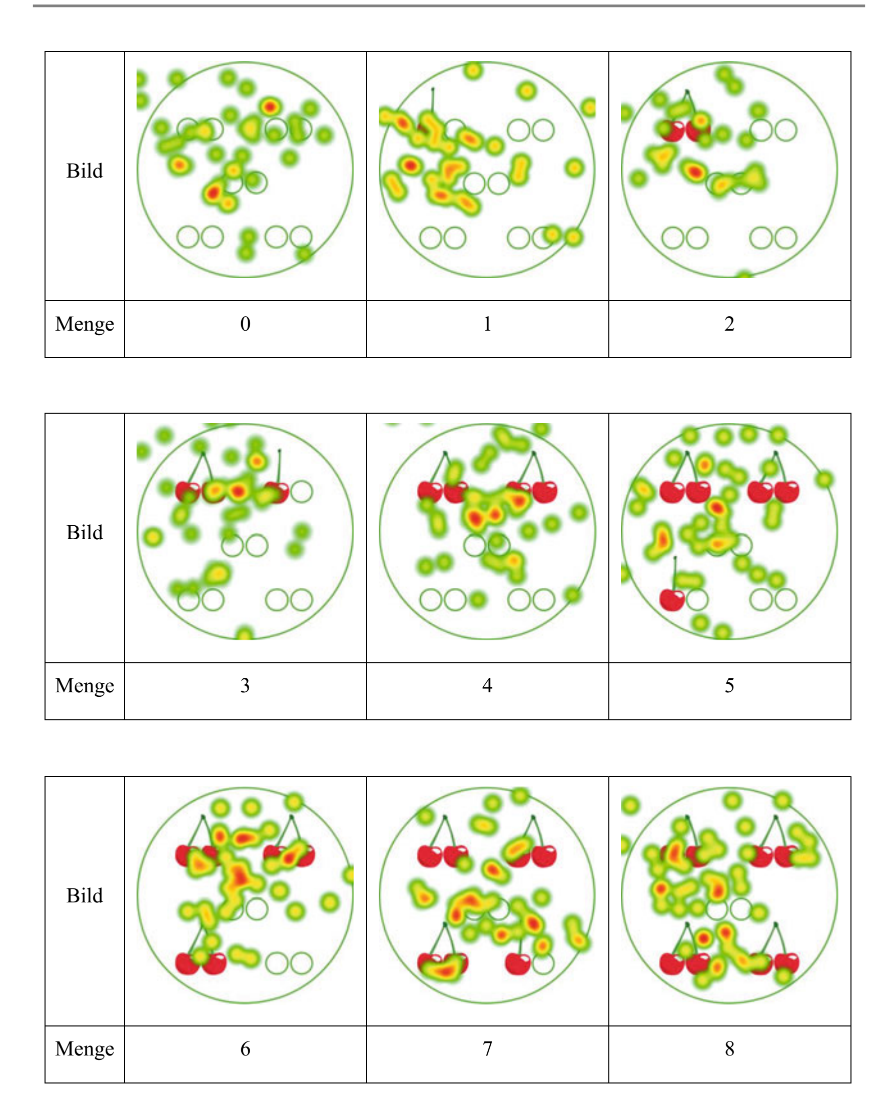


Abbildung 8.12 Kumulierte Fixationen der Kontrollgruppe (n = 18) im zweiten Durchgang, durch Heat Maps dargestellt

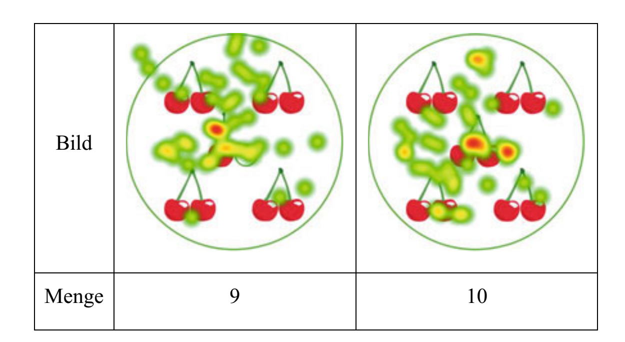


Abbildung 8.12 (Fortsetzung)

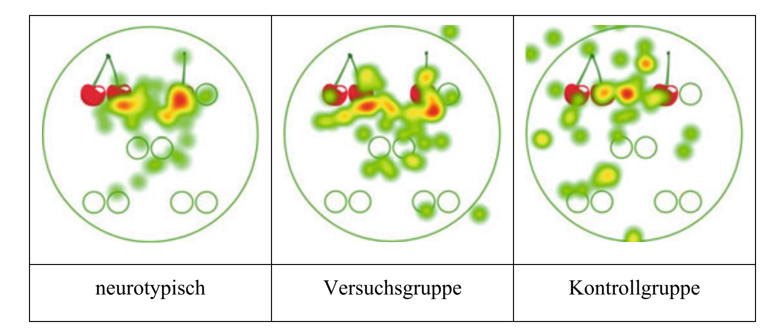


Abbildung 8.13 Heat Maps zum Mengenbild 3 der vorexperimentellen Versuchsanordnung, n = 20, und des Quasi-Experiments, Versuchsgruppe n = 18, Kontrollgruppe, n = 18

8.5.4.3 Analyse der Blickmuster zum Mengenbild 7 durch Gaze Plots

Für eine eingehendere Betrachtung der Blickverläufe und zur Validierung der These wurde auch in diesem Fall die Darstellungsmethode Gaze Plots gewählt. Die Blickverläufe aller Untersuchungspersonen beider Gruppen beim Mengenbild 7 wurden erneut ausgewertet und daraufhin untersucht, ob sie die beiden Charakteristika enthalten. Auch das Antwortverhalten der Untersuchungspersonen wurde erneut berücksichtigt.

Die Analyse der Blickverläufe zeigt, wie hier exemplarisch dargestellt, dass auch in der Versuchsgruppe die Charakteristika im Blickmuster auftreten (Abbildung 8.14).

VJ, 11;10 Jahre, männlich		
Blickverlauf Mengenbild 7		
Antwort	7	7
Charakteristika im Blickverlauf	ja	ja

Abbildung 8.14 Blickverläufe der Untersuchungsperson VJ beim Mengenbild 7 (beide Durchgänge)

Eine vollständige Darstellung aller Analysen findet sich im Anhang, ab S. 40 im elektronischen Zusatzmaterial.

Im Folgenden werden die Analyseergebnisse der verschiedenen Sichtungen des Mengenbilds 7 tabellarisch zusammengefasst (Tabelle 8.4).

In 29 Fällen wurde das Mengenbild 7 korrekt benannt. In 15 Fällen konnten dabei im Blickverlauf die Charakteristika identifiziert werden. In zwei Fällen waren die Charakteristika im Blickmuster zwar nachweisbar, aber es wurde eine falsche Anzahl genannt. Es existiert eine relative Häufigkeit von 52 % im Auftreten der Charakteristika bei ebenfalls auftretender korrekter Anzahlnennung.

Tabelle 8.4 Übersicht der analysierten Blickverläufe zum Mengenbild der 7 und zum Antwortverhalten der Versuchsgruppe. Angegeben ist die absolute Anzahl korrekter Anzahlnennungen, des Auftretens der Charakteristika im Blickverlauf, des Auftretens der Charakteristika bei korrekter Anzahlnennung und des Auftretens der Charakteristika bei fehlerhafter Anzahlnennung, n = 18

Untersuchungsperson	**korrekte Antwort**	**Charakteristika im Blickverlauf**		
		angewandt	**angewandt, korrekte Antwort**	**angewandt, falsche Antwort**
VA	2	1	1	0
VB	2	2	2	0
VC	2	0	0	0
VD	2	0	0	0
VE	2	0	0	0
VF	2	1	1	0
VG	2	1	1	0
VH	2	0	0	0
VI	0	0	0	0
VJ	2	2	2	0
VK	0	0	0	0
VL	1	1	0	1
VM	2	1	1	0
VN	2	2	2	0
VO	2	1	1	0
VP	2	2	2	0
VQ	2	2	2	0
VR	0	1	0	1
Gesamt	**29**	**17**	**15**	**2**

Tabelle 8.5 enthält analog dazu die Ergebnisse der Kontrollgruppe.

In vier Fällen wurde die richtige Anzahl an Kirschen genannt. In diesen Fällen lassen sich die Charakteristika im Blickmuster nicht identifizieren.

Tabelle 8.5 Übersicht der analysierten Blickverläufe zum Mengenbild der 7 und zum Antwortverhalten der Kontrollgruppe. Angegeben ist die absolute Anzahl korrekter Anzahlnennungen, des Auftretens der Charakteristika im Blickverlauf, des Auftretens der Charakteristika bei korrekter Anzahlnennung und des Auftretens der Charakteristika bei fehlerhafter Anzahlnennung, n = 18

Untersuchungsperson	korrekte Antwort	Charakteristika im Blickverlauf		
		angewandt	angewandt, korrekte Antwort	angewandt, falsche Antwort
KA	0	0	0	0
KB	0	0	0	0
KC	0	0	0	0
KD	0	0	0	0
KE	0	0	0	0
KF	0	0	0	0
KG	0	0	0	0
KH	0	0	0	0
KI	0	1	0	1
KJ	0	0	0	0
KK	0	0	0	0
KL	1	0	0	0
KM	0	1	0	1
KN	0	1	0	1
KO	0	0	0	0
KP	0	0	0	0
KQ	2	0	0	0
KR	1	0	0	0
Gesamt	**4**	**3**	**0**	**3**

8.5.5 Statistische Auswertung

Um die Unterschiede in den Gruppen untersuchen zu können, wurde der Zusammenhang der unabhängigen Variable *Bekanntheit der mathildr-Mengenbilder durch Unterricht* und der abhängigen Variable *Charakteristika im Blickverlauf und korrektes Antwortverhalten* statistisch ausgewertet. Zur statistischen Analyse der Daten wurde der Mann–Whitney-U-Test verwendet.

Es gab einen signifikanten Unterschied in Bezug auf das Auftreten der abhängigen Variable zwischen den Untersuchungspersonen der Versuchsgruppe ($M_{\text{Rang}} = 23{,}5$) und denen der Kontrollgruppe ($M_{\text{Rang}} = 13{,}5$), $U = 72$, $Z = -3{,}621$, $p < 0{,}001$, $r = 0{,}604$.

8.5.6 Interpretation

Die Effektstärkte wurde als Bravais-Pearson-Korrelationskoeffizient ermittelt: $r = 0{,}604$. Laut Cohen (1988, S. 78) ist ab einem Wert von $r = 0{,}5$ von einer starken Korrelation auszugehen.

Für die Untersuchungspersonen dieses Quasi-Experiments (N = 36) gilt demnach: Die unabhängige Variable *Bekanntheit der mathildr-Mengenbilder durch Unterricht* hat einen starken Effekt auf die abhängige Variable *Charakteristika im Blickverlauf und korrektes Antwortverhalten* und damit auf eine Internalisierung der mathildr-Mengenbilder bei einer Trisomie 21. Im Rahmen dieses Quasi-Experiments wurde folgende These verifiziert: *Die identifizierten Indikatoren einer Internalisierung der Mengenbilder treten bei Personen mit Trisomie 21, die bereits mit mathildr gearbeitet haben, signifikant häufiger auf als bei Personen mit Trisomie 21, denen das System zuvor nicht bekannt war.*

8.5.7 Qualität der Daten und Aussagekraft des Quasi-Experiments

In einigen Fällen konnten keine Messdaten erhoben werden, weil sich die Untersuchungspersonen aus dem Erfassungsbereich des Eyetrackers herausbewegten. In diesem Fall ließen sich keine Gaze-Plot-Darstellungen erstellen. Bei der Gegenüberstellung der Gaze-Plot-Darstellungen im Anhang wurde in diesem Fall *N/A* als Eintrag in der Zeile *Charakteristika im Blickverlauf* gewählt. In der Kontrollgruppe war dies viermal der Fall, in der Versuchsgruppe zweimal. In der statistischen Auswertung wurde ein solcher Eintrag mit einem Nichtauftreten der Charakteristika gleichgesetzt.

Entschieden sich Untersuchungspersonen nach der Präsentation des Mengenbilds 7 auch auf Nachfrage dazu, keine Anzahl zu nennen, wurde auch hier die Eintragung *N/A* vorgenommen. Dies kam in der Versuchsgruppe zweimal und in der Kontrollgruppe einmal vor und wurde in der Auswertung als falsche Antwort behandelt.

Eine Übertragung der Ergebnisse dieses Quasi-Experiments auf die Grundgesamtheit von Personen mit Trisomie 21 ist aufgrund der Anzahl der Untersuchungspersonen (N = 36) nicht möglich. Es handelt sich um eine explorative Studie, die keine repräsentative Übertragung der Ergebnisse zulässt. Aufgrund der Parallelisierung der Versuchs- und Kontrollgruppe erlauben die Ergebnisse Aussagen über die Gruppe der involvierten Untersuchungspersonen: In diesem Quasi-Experiment wurde in 15 Messdurchgängen die Internalisierung des Mengenbildes 7 deutlich. Diese Messdurchgänge traten bei zehn unterschiedlichen Untersuchungspersonen mit Trisomie 21 auf, die damit nachweislich die mathildr-Mengenbilder internalisiert haben.

8.6 Ergebnis

In der Auswertung der Eye-Tracking-Untersuchungen wurde ersichtlich, dass sich Personen mit Trisomie 21, die mathildr im Unterricht kennengelernt haben, die Mengenbilder auf ähnliche Weise erschließen wie neurotypische Personen, die eine Vorstellung von dem mathildr-System entwickelt haben. In dieser abschließenden Evaluierungsphase hat sich die Hypothese im Fall von zehn konkreten Untersuchungspersonen verifiziert:

Personen mit Simultandysgnosie können sich die mathildr-Mengenbilder einprägen und eine mentale Vorstellung von ihnen entwickeln.

Mit der Verifizierung der Hypothese wurde auch Teil c) der Fragestellung der vorliegenden Arbeit beantwortet:

Ist es möglich, ein Unterrichtsmaterial mit Hilfe von Educational Design Research zu entwickeln, das

a) Kriterien zur allgemeinen Gestaltung von Unterrichtsmaterialien nach Montessori, zu Anschauungsmaterialien nach Klafki und Galperin sowie zur Mengendarstellung nach Kühnel erfüllt,

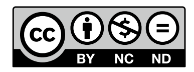
b) Darstellungen von Mengen und Rechenoperationen beinhaltet, die Menschen mit Simultandysgnosie erfolgreich anwenden, und.

c) empirische Hinweise zulässt, dass Menschen mit Simultandysgnosie tatsächlich mentale Bilder entwickeln?

(vgl. Unterkapitel 6.3).

Die Blickmuster und das Antwortverhalten im Quasi-Experiment einiger Personen mit Trisomie 21, die im Unterricht mit den mathildr-Mengenbildern gearbeitet haben, belegen, dass diese eine innere Vorstellung dieser Mengenbilder entwickelt haben. Demnach eignen sich die mathildr-Mengenbilder zur

Entwicklung von Mengenvorstellungen und können als Alternative zur Kraft der Fünf eingesetzt werden. Die mathildr-Mengenbilder können für Personen mit Simultandysgnosie eine barrierefreie Form von Mengenbildern darstellen, die sich auch unter den Bedingungen eines verkleinerten Aufmerksamkeitsumfangs mental abbilden lassen.





Diskussion

9

Im Folgenden werden Themenstränge aufgegriffen, die sich im Laufe des Forschungsprojekts ergeben haben. Reflektiert werden sollen die angewendeten Methoden und Theorien, die Form des Unterrichtmaterials und die Rezeptionen zu mathildr.

9.1 Zur Eignung des Educational Design Research für die Entwicklung barrierefreier Unterrichtsmaterialien

Zur Auswahl einer geeigneten Forschungsmethode wurden in Unterkapitel 5.1 folgende Anforderungen aufgestellt:

– Ergebnisorientierung: Mit Abschluss des Forschungsprojekts sollte ein nutzbares Unterrichtsmaterial zur Verfügung stehen.
– Kooperation mit der Zielgruppe: Es sollte Lernende mit Simultandysgnosie ermöglichen, sich aktiv am Entwicklungsprozess des Unterrichtmaterials zu beteiligen, um die Barrierefreiheit und Eignung zu gewährleisten.
– Evidenzbasierte Einordnung des Lernmaterials: Es sollte die Eignung des Unterrichtsmaterials für die Zielgruppe und den formulierten Zweck belegen können.
– Nachhaltigkeit: Der Entwicklungsprozess sollte transparent beschrieben werden, um grundlegende Erkenntnisse zur Entwicklung barrierefreier Lernmaterialien für ähnliche Projekte nutzen zu können.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_9

Nach einer Auseinandersetzung mit einschlägigen Quellen fiel die Wahl auf die Methode des Educational Design Research. Die Anforderung der Ergebnisorientierung wurde rückblickend vollständig erfüllt. Aufgrund der Arbeit mit Prototypen und des iterativen Charakters der Methode, der Zyklen von Design, Bewertung und Überarbeitung beinhaltet, nahm das Projekt alsbald den Charakter eines im Unterricht einsetzbaren Lernmaterials an. Auch die Kooperation mit der Zielgruppe war zu jeder Zeit gegeben. Sie ermöglichte die Gestaltung der unterschiedlichen Zyklen und gewährleistete die Entwicklung eines Lernmaterials, das den didaktischen und gestalterischen Anforderungen der Zielgruppe gerecht wird.

Die Anforderung der evidenzbasierten Einordnung des Lernmaterials konnte nur unter spezifischen Bedingungen erfüllt werden. Bei der Anwendung des Educational Design Research ist es grundsätzlich freigestellt, in einer abschließenden Evaluierungsphase mithilfe anerkannter Forschungsmethoden die Validität des Lernmaterials zu prüfen. Nieveen und Folmer (2013, S. 155) sind der Auffassung, dass bei Projekten mit geringem Impact auf die abschließende Evaluierungsphase verzichtet werden könne. Dies widerspricht allerdings dem Dreischritt wissenschaftlicher Aktivitäten Hackings, der neben einer Spekulation auch eine Kalkulation und ein Experiment einfordert (vgl. Unterkapitel 5.2.5). Bei Verzicht auf eine abschließende Evaluierung, die in diesem Fall mit Hilfe eines Quasi-Experiments erfolgte, würde ein Forschungsprojekt allerdings nicht über die Spekulation hinausgehen. Mit Hilfe der formativen Evaluation können Lernfortschritte nachvollzogen werden – sie kann aber keine Kausalität zwischen dem Material und dem Lernerfolg herstellen. Ein Educational-Design-Research-Projekt, das ein Unterrichtsmaterial entwickelt, aber auf ein abschließendes (Quasi-)Experiment verzichtet, zeigt unter Umständen nicht, ob die entwickelte pädagogische Intervention ihren Zweck erfüllt.

Die Anforderung der Nachhaltigkeit kann als erfüllt betrachtet werden. Im Educational Design Research spielen Transparenz und die Formulierung von Designprinzipien eine große Rolle. Die Designprinzipien, die aus dem vorliegenden Projekt hervorgegangen sind, wurden spezifisch für die Entwicklung eines mathematischen Lernmaterials formuliert (vgl. Unterkapitel 7.5), können aber zum Teil auch grundsätzlich auf die Entwicklung von Lernmaterialien bezogen werden, die für Menschen mit Aufmerksamkeitsbesonderheiten einen barrierefreien oder barrierearmen Unterricht gewährleisten sollen.

Es lässt sich feststellen, dass in der Entwicklung eines barrierefreien Lernmaterials, dessen Merkmale nicht ausschließlich deduktiv beschrieben werden können, Educational Design Research eine Lücke zwischen Wissenschaft und Praxis füllt, die nicht nur die Partizipation der Zielgruppe zur Entwicklung eines Lernmaterials ermöglicht (Development Studies), sondern bei Einsatz eines

(Quasi-)Experiments auch die zugrundeliegenden Theorien validiert (Validation Studies). Unter Berücksichtigung einer abschließenden Evaluierungsphase kann die Methode zur Unterrichtsmaterialentwicklung gewinnbringend eingesetzt werden.

9.2 Zur Auswahl von Kriterien zur Entwicklung eines neuen Lernmaterials zur Mengendarstellung

Zur Formulierung etwaiger durch das Lernmaterial zu erfüllender Kriterien wurden wissenschaftliche Erkenntnisse aus der Neurobiologie sowie aus Lerntheorien und -materialien teilweise bis zu ihren Wurzeln, d. h. den ursprünglichen Urheber*innen, verfolgt. Die Ursprünge der Kraft der Fünf ließen sich in Kühnelschen Zahlenbildern wiederfinden, die der Anschauungsmaterialien, die die Internalisierung von Bildern ermöglichen sollen, im Etappenmodell zur geistigen Handlung Galperins. Diese Auseinandersetzung mit der Historik didaktischer Konzepte mag kleinteilig sein, schafft aber die Möglichkeit, die ursprüngliche Intention eines Lernmaterials nachzuvollziehen. Sie verhindert, dass die Arbeit mit Lernmaterialien zum Selbstzweck wird, da reflektiert wird, aus welcher Motivation heraus Lernmaterialien und -konzepte entwickelt wurden und warum sie in ihrer heutigen Form vorliegen. Diese Erkenntnis ermöglicht die gewinnbringende Anwendung eines Materials und lässt erkennen, wenn spezifische Anforderungen für ausgewählte Schüler*innen nicht erfüllt werden.

Die Kriterien für Mengendarstellungen (Unterkapitel 6.1.3), die zur Entwicklung des mathildr-Systems herangezogen wurden, orientieren sich an grundlegenden Merkmalen, die als bedeutend erachtet wurden, um unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie zielführend mentale Bilder entwickeln zu können. Schipper (1996) formulierte didaktische Kriterien für Mengendarstellungen, die in der Entwicklung von mathildr zwar nicht vollständig verfolgt werden konnten, an dieser Stelle aber reflektiert werden sollen. Der Kriterienkatalog Schippers umfasst sieben didaktische Kriterien:

1. Erlaubt das Material zählende Zahlauffassung, zählende Zahldarstellung und zählendes Rechnen?
2. Erlaubt das Material quasi-simultane Zahlauffassung und Zahldarstellung bis 10 bzw. 20?
3. Unterstützt das Material die Ablösung vom zählenden Rechnen?
4. Erlaubt das Material Handlungen, die operative Strategien des Rechnens im Zahlenraum bis 20 entwickeln helfen?

5. Erlaubt das Material den Kindern die Entwicklung unterschiedlicher, individueller Lösungswege?
6. Gibt es zu dem Material strukturgleiche Fortsetzungen für das Rechnen im Zahlenraum bis 100?
7. Gibt es zu dem Schülermaterial passende Demonstrationsmaterialien?

(Schipper, 1996, S. 39)

Die Kriterien 1, 2 und 3 werden von dem neu entwickelten Lernmaterial erfüllt. Mit dem Kriterium 4 fordert Schipper, dass das Verdoppeln, Halbieren, Zerlegen und Zusammensetzen von Zahlen mit Hilfe des Materials zu ermöglichen sei (ebd., S. 40). Da in der mathildr-App nicht nach Belieben ausgewählte Kirschen ausgetauscht werden können, muss zur Erfüllung dieses Kriteriums auf die Materialisierung des Zehnerfeldes aus Holz zurückgegriffen werden. Das Gleiche gilt für das fünfte Kriterium: Um das Hauptanliegen zu ermöglichen, eine für Lernende mit Simultandysgnosie barrierefreie Form von Mengenbildern zur Verfügung zu stellen, wurde auf das individuelle Ablegen von Kirschen im Zehnerfeld der App bewusst verzichtet. Individuelle Mengenbilder, die auf der Struktur des Zehnerfeldes basieren, können mit dem Zehnerfeld aus Holz dargestellt werden. Allerdings ist dann die quasi-simultane Erfassbarkeit nicht immer gegeben.

Das mit dem Kriterium 6 geforderte Lernmaterial im Zahlenraum 100 besteht im Falle des mathildr-Systems bisher nur als Konzept. Ein Hunderterfeld, das auf Selbstähnlichkeit basiert, wurde zwar konzipiert (siehe Anhang S. 53 im elektronischen Zusatzmaterial), bisher aber kaum erprobt. Da halbschriftliche und schriftliche Rechenverfahren auf symbolischer Ebene eine Auseinandersetzung mit dem Zahlenraum 100 ermöglichen und durch den Einsatz eines Taschenrechners als Nachteilsausgleich andere Teilgebiete der Mathematik als die Arithmetik erschlossen werden können (vgl. Unterkapitel 2.4), bestand bisher nur selten Anlass, die Menge 100 im mathildr-System zu veranschaulichen. Ein Verharren in der Veranschaulichung von Mengen hat sich in der Entwicklungstherapie, die der Autor durchführt, bisher nicht ergeben.

Das siebte Kriterium Schippers, das passende Demonstrationsmaterialien fordert, ist dadurch erfüllt, dass die mathildr-App auf großen Displays und interaktiven Whiteboards verwendet werden kann.

Die Auseinandersetzung mit Schippers Kriterien verdeutlicht, dass das mathildr-Lernmaterial in seiner nicht materialisierten Form den Großteil der Funktionen von Lernmaterialien mit Fünferbündelung unterstützt. Nicht erfüllbare Anforderungen liegen darin begründet, dass die App den Aufbau individueller

Mengenbilder nicht zulässt. Die vorliegende Arbeit zeigt allerdings, dass gerade der Umgang mit den nichtindividualisierten Mengenbildern die Entwicklung mentaler Mengenbilder unter den Bedingungen einer Simultandysgnosie ermöglicht. Sollte im individuellen Fall die Überlegung bestehen, von den Mengenbildern abzuweichen, ist hierzu die Arbeit mit dem Zehnerfeld aus Holz möglich.

9.3 Zum Charakter digitaler Lernmaterialien

Die Tatsache, dass das Lernmaterial, das aus diesem Forschungsprojekt hervorgegangen ist, digitaler Natur ist, wurde nicht nur positiv rezipiert. Den Autor erreichten Rückmeldungen von Lehrkräften und Eltern, die eine Schwierigkeit darin sehen, dass Kinder bereits im Schulalter mit digitalen Medien arbeiten. Ohne die Debatte zu den Vor- und Nachteilen digitaler Lernmaterialien umfassend zu reflektieren, sollen an dieser Stelle zumindest die Bedeutung digitaler Medien im Schulunterricht und der Hintergrund der digitalen Beschaffenheit des Materials aufgegriffen werden.

Der Einsatz digitaler Medien an Schulen wird immer bedeutender, lässt sich erfahrungsgemäß ab der Sekundarstufe verorten und zielt häufig auf eine Steigerung der computer- und informationsbezogenen Kompetenzen ab. Eickelmann, Gerick, Drossel und Bos unterscheiden in der ICILS-2013-Studie zwei Teilbereiche dieser Kompetenzen: *Informationen sammeln und organisieren* und *Informationen erzeugen und austauschen* (2016, S. 10 f.). Lerngegenstände sind u. a. das Wissen zur Nutzung des Computers, die Fähigkeit, auf Informationen zuzugreifen, sie zu bewerten, verarbeiten und zu organisieren sowie die Erzeugung, der Austausch und die sichere Nutzung von Informationen (ebd., S. 11). Im Social-Media-Kontext wird daneben auch die *Digitale Mündigkeit* (vgl. Simon, 2019) zum Diskussions- und Lerngegenstand: Schüler*innen lernen, Verantwortung für ihr Handeln im digitalen Umfeld zu entwickeln, und verstehen, welche Daten sie preisgeben und wie sie sich sicher online bewegen.

Dass auch Computerspiele ein lohnenswerter Lerngegenstand sein können, belegen beispielsweise Hoffmann und Lüth (2007), die das Adventure-Spiel *Torins Passage* im Deutschunterricht einsetzten, um Schreibanlässe anzubahnen und Perspektivwechsel anzuregen. Eine besondere Stellung haben Computerspiele inne, die das Ziel verfolgen, ihre Nutzer*innen zu bilden. Sie treten nicht als Lerngegenstand in Erscheinung, sondern als Lernmedium. Das Angebot an Lernspielen, die Unterrichtsgegenstände didaktisch aufbereiten und automatisiert vermitteln sollen, ist groß (vgl. Rieckmann, 2018), der Einsatz solcher Lösungen

aber nicht unumstritten. Viele Lernspiele arbeiten nach Prinzipien der behavioristischen Psychologie. Bei gewünschtem Verhalten (beispielsweise der richtigen Beantwortung einer Additionsaufgabe) werden Punkte, oft in Form von Sternen, vergeben, die den Lernfortschritt verdeutlichen sollen und in vielen Fällen gegen kleine Spieleinheiten ohne Bezug zum Lerngegenstand eingetauscht werden können. Im pädagogischen Diskurs hat sich der Begriff *Skinner-App* etabliert, der auf die Beobachtung Krommers (2019, S. 97) zurückgeht, dass B. F. Skinner bereits 1954 an ähnlichen Lernmedien, sog. *Teaching-Machines*, forschte.

Die mathildr-App stellt weder eine Skinner-App noch ein Lernspiel dar. Sie ist ein elektronisches Werkzeug, dessen Einsatz eine Anleitung und einen Lernprozess zur korrekten Verwendung voraussetzt. Im Softwarebereich reiht sie sich in die Kategorie *Tool* ein, zu der u. a. auch Textverarbeitungsprogramme, digitale Pinnwände oder Routenplaner gehören. In Bezug auf klassische Schulmaterialien ist sie mit einem Taschenrechner vergleichbar, den Schüler*innen an geeigneter Stelle im Unterricht verwenden können. Die Touchscreen-Bedienung, die zur Barrierefreiheit beiträgt, die Unterstützung bei der Eingabe der Mengenbilder und die Zahlanzeige der App sind wesentliche Bestandteile des Lernmaterials, die allerdings nur aufgrund seiner digitalen Natur umsetzbar sind. Das Lernmaterial hat nicht zufällig die Form einer App, sondern, um die zuvor formulierten Kriterien zu erfüllen. Eine analoge Nachbildung der mathildr-Mengenbilder ist mit der Materialisierung des Zehnerfeldes aus Holz möglich (vgl. Unterkapitel 7.4.3), aber unter Umständen nicht barrierefrei. Die digitale Natur von mathildr bildet einen wesentlichen Bestandteil des Lernkonzepts und ist unter den Bedingungen einer Trisomie 21 für den Lernerfolg entscheidend. Als positiver Nebeneffekt ist die Arbeit mit mathildr von jedem Ort aus ohne Lieferzeit möglich, solange ein geeignetes Endgerät und zeitweilig eine Internetverbindung vorhanden sind.

9.4 Rückmeldungen zum Lernmaterial

Das Forschungsprojekt und das dazugehörige Lernmaterial wurden in diversen Vorlesungen und Workshops des Autors national wie international vorgestellt und diskutiert (u. a. World Down Syndrome Congress 2018 in Glasgow, IASSIDD Europe Congress 2018 in Athen und Zero Project Conference 2020 im Vienna International Center der UN). Insbesondere in den Workshops ergaben sich Diskussionen mit erfahrenen Lehrkräften, Lerntherapeut*innen, Erzieher*innen und Eltern über die Anforderungen eines barrierefreien Lernmaterials bei Simultandysgnosie. Dabei wurde deutlich, dass ein gewinnbringender Einsatz des

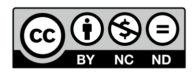
Lernmaterials eine Auseinandersetzung mit dem Lernmaterial seitens der erwachsenen Person erfordert und nicht trivial ist. Regelmäßig erreichen den Autor Rückmeldungen, dass Kinder mit Hilfe von mathildr Blockadehaltungen abgebaut und ihre mathematischen Fähigkeiten weiterentwickelt hätten.

Ratz und Moser Opitz (2016, S. 405 f.) bezeichnen das mathildr-System indes als ungünstige Veranschaulichung: „Erstens ist problematisch, dass für jede Zahl ein neuer Kreis zur Darstellung verwendet wird, das dazu führt, dass sich die Anzahl mit jedem neuen Kreis verändert und insgesamt 55 Kirschen (unübersichtlich) dargestellt sind. Zweitens wird die Zehnerstruktur, die für die Einsicht ins dezimale Stellenwertsystem fundamental ist, nicht hervorgehoben. Drittens kann die Darstellung der Kirschenpaare zu Missverständnissen führen. Erfahrungen haben gezeigt, dass Kinder ein Kirschpaar nicht als zwei, sondern als eins wahrnehmen“. In einem weiteren Artikel wiederholt Ratz die Kritik zur Darstellungsweise der Mengen 0 bis 10 mit 55 Kirschen (2016, S. 17). Zur Problematik der stark eingeschränkten Anwendbarkeit der Kraft der Fünf im Unterricht von Schüler*innen mit Simultandysgnosie äußern sich die Autor*innen nicht.

Tatsächlich wird zur Darstellung jeder neuen Zahl im mathildr-System kein neuer Kreis verwendet. Analog zum Zehnerfeld der Kraft der Fünf wird ein leeres Zehnerfeld schrittweise aufgefüllt. Beispielsweise wird aus dem Mengenbild 4 das Mengenbild 5, indem ein weiteres Element hinzugefügt wird. Würden im System der Kraft der Fünf mithilfe von elf Zehnerfeldern die Mengenbilder 0 bis 10 dargestellt, würden ebenfalls 55 Wendeplättchen benötigt (siehe Abbildung 3.11). Auch bei mathildr wird eine Zehnerstruktur deutlich: Ein Zehnerfeld (Kreis), in dem sich die maximale Anzahl an Kirschen befindet, stellt die 10 dar. Der verbleibende Kritikpunkt, dass ein Kirschpaar als 1 verarbeitet werden könne, deckt sich mit den Erfahrungen des Autors. Anfangs müssen sich die Schüler*innen die Bedeutung der Unterscheidung von Kirschpaar und Einzelkirsche erschließen. Im Aneignungsprozess der Mengenbilder setzen sie sich erst mit der Zweierbündelung auseinander, bevor sie diese gewinnbringend nutzen können. Dass die Arbeit mit einem neuen Lernmaterial Übung und Auseinandersetzung erfordert, ist nicht ungewöhnlich. Auch ein erfolgreicher Unterricht mit dem Zehnerfeld der Kraft der Fünf oder einem Abakus erfordert die Erschließung der materialimmanenten Regeln.

Die mathildr-App wird u. a. vom digital.learning.lab sowie in der Broschüre *Barrierefreie Lernsoftware & Apps für inklusives Lernen* empfohlen und war Teil der Ausstellung *TOUCHDOWN. Eine Ausstellung mit und über Menschen mit Down-Syndrom* (vgl. Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg, 2020; Werning 2019; Kunst- und Ausstellungshalle der Bundesrepublik Deutschland, 2016). Sie wurde mit dem dritten Platz des Cornelsen-Zukunftspreises 2018, dem

Comenius EduMedia-Siegel 2019 und dem ersten Platz des Niedersächsischen Inklusionspreises 2019 ausgezeichnet (vgl. Cornelsen Stiftung, 2018; Gesellschaft für Pädagogik Information und Medien e. V., 2019; SoVD Landesverband Niedersachsen, 2019).





10 Resultat

10.1 Aussagekraft



Abbildung 10.1 Das Mengenbild 7 aus dem Gedächtnis gezeichnet von Noa

Das vorliegende Forschungsprojekt zeigt, dass es möglich ist, ein Unterrichtsmaterial zu entwickeln, das spezifische Kriterien erfüllt, um Mengen und Operationen barrierefrei für Menschen mit Simultandysgnosie darzustellen. Mit Hilfe formativer Evaluation wurde nachgewiesen, dass Schüler*innen mit Trisomie 21 unter Verwendung des Materials ihre mathematischen Fähigkeiten weiterentwickelt haben. Darüber hinaus wurde in einem Quasi-Experiment mithilfe von Eye-Tracking belegt, dass einige dieser Schüler*innen mentale Vorstellungen der Mengenbilder des Materials entwickelt haben. Dennoch sollte nicht der Trugschluss entstehen, dass alle Lernenden mit Simultandysgnosie zwangsläufig von mathildr profitieren. Schüler*innen unterscheiden sich in ihren Vorerfahrungen, Begabungen, Interessen und Kompetenzen. Das mathildr-Lernmaterial kann für

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1_10

sie – so wie jedes Lernmaterial – unter Umständen völlig ungeeignet sein. Mögliche Beispiele sind Schüler*innen, die noch keine Objektpermanenz entwickelt haben und durch die Arbeit mit der mathildr-App überfordert würden, oder solche, die bereits eine Zahlvorstellung entwickelt haben, im Kopf rechnen können und durch die App demnach unterfordert würden. Erfahrungsgemäß gibt es einzelne Personen, die trotz der schulischen Arbeit mit der Kraft der Fünf eine Mengenvorstellung entwickelt und das Kopfrechnen erlernt haben, indem sie eigene Bündelungsformen und Rechenstrategien entwickelt haben. Dabei handelt es sich um eine anerkennenswerte Leistung, die gefördert werden sollte. Das mathildr-Lernmaterial bietet den Lernenden einen Vorschlag zur gedanklichen Darstellung von Mengen. Ob im Einzelfall dieser Vorschlag als praktikabel erachtet und angenommen wird, liegt im Ermessen der individuellen Schülerin bzw. des individuellen Schülers (Abbildung 10.1).

10.2 Fazit

Zu Beginn dieser Arbeit wurde die Frage aufgeworfen, ob die mathematischen Lernschwierigkeiten von Menschen mit Trisomie 21 allein auf das Syndrom oder auch auf mangelhaften Schulunterricht zurückzuführen sind. Die Auseinandersetzung mit der Informationsverarbeitung von Menschen mit Trisomie 21 und den Lernmaterialien der Kraft der Fünf hat gezeigt, dass Schüler*innen mit Simultandysgnosie regelmäßig Unterrichtsmaterial zur Verfügung gestellt wird, das inkompatibel zu ihrem Aufmerksamkeitsumfang ist und die pädagogische Absicht, ein mentales Bild zu entwickeln, nicht erfüllen kann. Der Unterricht mit traditionellen Lernmaterialen ist demnach ungeeignet, um mathematischen Lernschwierigkeiten bei Simultandysgnosie zu begegnen. Im Rahmen des Forschungsprojekts wurde daher ein Unterrichtsmaterial entwickelt, das sich zur barrierearmen bzw. barrierefreien Gestaltung des Mathematikunterrichts für Schüler*innen mit Simultandysgnosie eignet. In der abschließenden Evaluation wurde deutlich, dass die Entwicklung gedanklicher Mengenbilder mit diesem Material möglich ist.

10.3 Ausblick

Lehrkräfte stehen täglich vor der Herausforderung, Unterricht zu gestalten, der unabhängig von möglichen Lernschwierigkeiten, Behinderungen oder Hochbegabungen alle Schüler*innen adäquat fördert. Die gängigen Lernmaterialien sind zur

Bewältigung dieser Aufgabe nicht immer hilfreich, da sie selten den individuellen Anforderungen aller Schüler*innen entsprechen.

Das vorliegende Forschungsprojekt offenbart die Bedeutung von Grundlagenforschung für die Unterrichtsentwicklung: Der Anlass dieses Projekts war André Frank Zimpels *Aufmerksamkeitsstudie zur Verbesserung des Lernerfolgs von Menschen mit Trisomie 21*, die ein Überdenken des Einsatzes der Kraft der Fünf erst hervorrief. Grundlagenforschung auf einem zeitgemäßen Niveau kann das Fundament für Forschungsprojekte bilden, die Problemstellungen der Pädagogik und Didaktik bewältigen. Ein erfolgreicher Forschungstransfer ermöglicht, dass ein „Das haben wir schon immer so gemacht!“ einem „So geht es besser!“ weicht. Das vorliegende Projekt ermöglicht durch die wissenschaftliche Weiterentwicklung grundlegender Prinzipien der Didaktik, dass Schüler*innen mit Simultandysgnosie im Mathematikunterricht eine Alternative zum üblichen Lernmaterial verwenden können, das zur Zeit der Weimarer Republik auf dem damaligen wissenschaftlichen Stand für neurotypische Kinder entwickelt wurde (vgl. Unterkapitel 3.3.1).

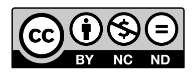
Die Kraft der Fünf ist nur ein Lernprinzip unter vielen, das sich fest in der Didaktik etabliert hat, aber nicht für alle Schüler*innen geeignet ist. Dementsprechend ist das mathildr-Lernmaterial ein kleiner Baustein, der dazu beitragen kann, einen individuellen Unterricht zu gestalten, der der Neurodiversität der Schülerschaft gerecht wird. Zur Gewährleistung eines Unterrichts, der Neurodiversität ernstnimmt und die individuelle Entwicklung der Schüler*innen berücksichtigt und fördert, sollten idealerweise viele weitere Unterrichtsmaterialien folgen, die den spezifischen Anforderungen einer diversen Schülerschaft gerecht werden.

Das vorliegende Forschungsprojekt verdeutlicht, dass es lohnenswert ist, Schüler*innen in die Entwicklung von Lernmaterialien aktiv einzubeziehen. Eine forschungsunterstützte Entwicklung des Unterrichtmaterials stellt nicht nur sicher, dass es tatsächlich einen Lernerfolg herbeiführen kann, sondern auch, dass es attraktiv für die Zielgruppe ist und diese gerne mit dem Material arbeitet. Letztlich sind es die Schüler*innen, die zur Verwendung des Materials motiviert werden sollen.

Mithilfe eines multiprofessionellen Teams und des Engagements unterschiedlicher Akteur*innen können Lernmaterialien entwickelt werden, die keine kommerzielle Verwertung fokussieren. In diesem Projekt engagierten sich neben dem Forschungsteam an der Universität Hamburg Familienmitglieder und Freund*innen des Autors, Lehrpersonen, Erzieher*innen sowie Personen mit Simultandysgnosie und deren Eltern. Ein ganz besonderer Dank gebührt Rolf Rieckmann, Dennis Krohn und sämtlichen Kindern, Jugendlichen und Erwachsenen mit Simultandysgnosie, ohne die dieses Projekt nicht möglich gewesen wäre.

Damit das mathildr-Lernmaterial auch zukünftig zur Verfügung gestellt werden kann und nicht von dem Engagement von Einzelpersonen abhängt, wurde im November 2018 der gemeinnützige Verein *Guter Unterricht für alle e. V.* gegründet. Aktuell ermöglicht der Verein die kostenlose Bereitstellung der mathildr-Web-App und den Bezug der analogen Lernmaterialien. Unter der URL http://www.mathildr.app kann die Web-App in nahezu jedem Browser verwendet werden.

Die Erfahrungen rund um das Forschungsprojekt lassen erkennen, dass seitens der Schulen ein großes Interesse besteht, sich mit der Neurodiversität der eigenen Schülerschaft auseinanderzusetzen und diese im Unterricht gezielt zu adressieren. Lehrkräfte ergänzen das Lernmaterial, das beispielsweise von Schulbuchverlagen bezogen wurde, mit alternativen Lernmaterialien wie der mathildr-App, die als Freeware bezogen werden kann, oder Lernmaterialien, die als Open Educational Resources (vgl. Müller, 2019) vorliegen. Ein solches Bestreben nach einem individualisierten Unterricht macht nicht die Lernschwierigkeiten oder Behinderungen von Schüler*innen dafür verantwortlich, wenn Probleme mit einem Material bestehen, sondern sucht oder entwickelt alternative Lernmaterialien, die den Anforderungen der Schüler*innen gerecht werden.



Quellen

Adobe. (2020). Illustrator User Guide. Zugriff am 16.6.2020. Verfügbar unter: https://helpx.adobe.com/illustrator/user-guide.html.

van den Akker, J. (1999). Principles and Methods of Development Research. In J. van den Akker, R.M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Hrsg.), *Design Approaches and Tools in Education and Training* (S. 1–14). Dordrecht: Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-94-011-4255-7_1.

van den Akker, J., Gravemeijer, K., McKenney, S. & Nieveen, N. (2007). Introducing educational design research. In J. van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenny & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research* (2. Auflage, S. 3–7). London: Routledge.

Alidou, H. & Glanz, C. (2015). *Action research to improve youth and adult literacy. Empowering learners in a multilingual world*. (C. Glanz, Hrsg.). Hamburg: UNESCO Institute for Lifelong Learning (UIL), UNESCO Multi-sectoral Regional Office Abuja.

Altrichter, H., Aichner, W., Soukup-Altrichter, K. & Welte, H. (2010). PraktikerInnen als ForscherInnen. In B. Friebertshäuser, A. Langer & A. Prengel (Hrsg.), *Handbuch Qualitative Forschungsmethoden in der Erziehungswissenschaft* (3. Auflage, S. 803–818). Weinheim: Juventa Verlag.

Altrichter, H. & Posch, P. (2007). *Lehrerinnen und Lehrer erforschen ihren Unterricht. Unterrichtsentwicklung und Unterrichtsevaluation durch Aktionsforschung* (4. Auflage). Bad Heilbrunn: Julius Klinkhardt.

Association of Teachers of Mathematics. (2017). *Cuisenaire – from Early Years to Adult*.

Baccarin, M. E., Benedetti, N. & Monari Martinez, E. (2004). Strategie per avviare studenti con disabilità alla matematica «avanzata»: equazioni e geometria analitica. *Difficoltà di Apprendimento*, *10*(2), 183–200.

Behörde für Schule und Berufsbildung Hamburg. (2020). mathildr. Mengenbilder im mathematischen Anfangsunterricht. Zugriff am 20.11.2020. Verfügbar unter: https://digitallearninglab.de/tools/mathildr.

Beywl, W. & Zierer, K. (2013). Lernen sichtbar machen. Zur deutschsprachigen Ausgabe von "Visible Learning." In J. Hattie (Hrsg.), *Lernen sichtbar machen. Überarbeitete deutschsprachige Ausgabe von Visible Learning* (3. Auflage, S. VI–XXVI). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Boll, J. (2017). *Mathematische Förderung mit Mathildr. Experimentelle Überprüfung der mathematischen Lernentwicklung eines Zehntklässlers.* Universität Hamburg.

T. Rieckmann, *Internalisierbare Mengenbilder im individualisierten Mathematikunterricht*, https://doi.org/10.1007/978-3-658-38945-1

Breiner, T. C. (2019). *Farb- und Formpsychologie.* Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57870-4.

Brigstocke, S., Hulme, C. & Nye, J. (2008). Number and arithmetic skills in children with Down syndrome. *Down Syndrome: Research and Practice*, 74–78.

Bruner, J. S. (1971). Ein Überblick. In J.S. Bruner, R.R. Olver & P.M. Greenfield (Hrsg.), *Studien zur kognitiven Entwicklung. Eine kooperative Untersuchung am „Center for Cognitive Studies" der Harvard-Universität* (S. 377–385). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Buckley, S. & Sacks, B. (1987). *The Adolescent with Down's Syndrome. Life for the Teenager and for the Family*. Portsmouth: Portsmouth Polytechnic.

Bundesinstitut für Arzneimittel und Medizinprodukte. (2020). Internationale statistische Klassifikation der Krankheiten und verwandter Gesundheitsprobleme, 10. Revision, German Modification,Version 2021. Stand: 18. September 2020 mit Aktualisierung vom 11.11.2020. Bonn.

Buschfeld, A. (2017). *Zahlvorstellungen entwickeln mit Hilfe von barrierefreien Mengenbildern. Eine Untersuchung zur Eignung des Unterrichtmaterials "mathildr."* Universität Hamburg.

Butterworth, B. (1999). *The Mathematical Brain.* London: Macmillan.

Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia. In J.I.D. Campbell (Hrsg.), *The Handbook of Mathematical Cognition* (S. 455–467). Hove: Psychology Press.

Campbell-Dollaghan, K. (2014). Who Designed the Hamburger Icon? Zugriff am 23.6.2020. Verfügbar unter: https://gizmodo.com/who-designed-the-iconic-hamburger-icon-1555438787.

Carr, J. (1988). Six Weeks To Twenty-One Years Old: A Longitudinal Study Of Children With Down's Syndrome And Their Families. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *29*(4), 407–431. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.1988.tb00734.x.

Cauty, A. (2006). Die Arithmetik der Maya. *Spektrum der Wissenschaft Spezial. Ethnomathematik*, *2*, 16–21.

Clements, D. H. (1999). Subitizing: What Is It? Why Teach It? *Teaching Children Mathematics*, 400–405.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences* (2. Auflage). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Cornelsen Stiftung. (2018). Cornelsen Zukunftspreis. Die Gewinner 2018. Zugriff am 20.11.2020. Verfügbar unter: https://www.stiftung-lehren-lernen.de/zukunftspreis/2018.

Cottini, L. & Nota, L. (2007). School Inclusion: The Italian Model. In J.-A. Rondal & A. Rasore-Quartino (Hrsg.), *Therapies and Rehabilitation in Down Syndrome* (S. 144–162). John Wiley & Sons.

Cowan, N. (2000). The magical number 4 in short-term memory: A reconsideration of mental storage capacity. *Behavioral and Brain Sciences*, *24*, 87–114.

Csikszentmihalyi, M. (2019). *Das Flow-Erlebnis* (12. Auflage). Stuttgart: Klett-Cotta.

Dantzig, T. (2005). *Number: The Language of Science.* New York: Pi Press.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, *44*, 1–42.

Dehaene, S. (2011). *The Number Sense. How the Mind creates Mathematics.* New York: Oxford University Press.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1994). Dissociable Mechanisms of Subitizing and Counting: Neuropsychological Evidence From Simultanagnosic Patients. *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *20*(5), 958–975. https://doi.org/10.1037/0096-1523.20.5.958.

Dehaene, S. & Cohen, L. (1995). Towards an Anatomical and Functional Model of Number Processing. *Mathematical Cognition*, *1*, 83–120.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P. & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20*(3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239.

Deubel, H. & Schneider, W. X. (1996). Saccade Target Selection and Object Recognition: Evidence for a Common Attentional Mechanism. *Vision Research*, *36*(12), 1827–1837. https://doi.org/10.1016/0042-6989(95)00294-4.

Dienes, Z. P. (1967). *Building Up Mathematics*. London: Hutchinson Educational.

Down, J. L. H. (1866). Observations on an Ethnic Classification of Idiots. *London Hospital Reports,* (3), 259–262.

Duchowski, A. T. (2017). *Eye Tracking Methodology* (3. Auflage). Cham: Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-319-57883-5.

Duden. (2007). Design, das. *Duden. Das Fremdwörterbuch.* Dudenverlag.

Duden. (2020). Flow , der. *Duden.de*. Dudenverlag.

Eckhard, G. (2013). *Entwicklungs- und Pädagogische Psychologie. Zentrale Schriften und Persönlichkeiten.* Wiesbaden: Springer.

Eickelmann, B., Gerick, J., Drossel, K. & Bos, W. (2016). Vertiefende Analysen zu ICILS 2013 – Konzeption, zentrale Befunde und mögliche Entwicklungsperspektiven. In B. Eickelmann, J. Gerick, K. Drossel & W. Bos (Hrsg.), *ICILS 2013. Vertiefende Analysen zu computer- und informationsbezogenen Kompetenzen von Jugendlichen* (S. 7–32). Münster: Waxmann Verlag.

Esquirol, J. É. D. (1838). *Die Geisteskrankheiten in Beziehung zur Medizin und Staatsarzneikunde. Zweiter Band*. Berlin: Verlag der Voss'schen Buchhandlung.

Faragher, R. (2017). "Functional" Mathematics in an Electronic Age: Implications for Classroom Practice. In V. Barker, T. Spencer & K. Manuel (Hrsg.), *Capital Maths. Proceedings of the 26th Biennial Conference of the Australian Association of Mathematics Teachers Inc.* Adelaide: The Australian Association of Mathematics Teachers.

Feuser, G. (1995). *Behinderte Kinder und Jugendliche. Zwischen Integration und Aussonderung*. Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Feuser, G. (2011). Entwicklungslogische Didaktik. In A. Kaiser, D. Schmetz, P. Wachtel & B. Werner (Hrsg.), *Didaktik und Unterricht* (S. 86–100). Stuttgart: Kohlhammer.

Fischer, B., Gebhardt, C. & Hartnegg, K. (2008). Article Subitizing and Visual Counting in Children with Problems in Acquiring Basic Arithmetic Skills. *Optometry & Vision Development*, *39*(1), 24–29.

Flexer, R. J. (1986). The Power of Five: The Step before the Power of Ten. *The Arithmetic Teacher*, *34*(3), 5–9.

von Foerster, H. (1993). *KybernEthik*. Berlin: Merve Verlag.

Frank, H. (1964). *Kybernetische Analysen subjektiver Sachverhalte.* Quickborn: Verlag Schnelle.

Frege, G. (1987). *Die Grundlagen der Arithmetik*. Stuttgart: Reclam.

Fuchs, L. S. & Fuchs, D. (1986). Effects of Systematic Formative Evaluation: A Meta-Analysis. *Exceptional Children*, *53*(3), 199–208. https://doi.org/10.1177/001440298605300301.

Gallistel, C. R. & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*, 43–74.

Galperin, P. J. (1967a). Die Entwicklung der Untersuchungen. In H. Hiebsch (Hrsg.), *Ergebnisse der sowjetischen Psychologie* (S. 367–405). Berlin: Akademie-Verlag.

Galperin, P. J. (1967b). Die geistige Handlung als Grundlage für die Bildung von Gedanken und Vorstellungen. In P.J. Galperin, A.N. Leontjew & E. Däbritz (Hrsg.), *Probleme der Lerntheorie* (S. 33–49). Berlin: Volk und Wissen.

Galperin, P. J. (1973). Die Psychologie des Denkens und die Lehre von der etappenweisen Ausbildung geistiger Handlungen. In E.A. Budilova, E.W. Schorochowa, P.J. Galperin, N.A. Eliawa, A.W. Bruschlinski, P.A. Schewarjow et al. (Hrsg.), *Untersuchungen des Denkens in der sowjetischen Psychologie* (S. 81–119). Berlin: das europäische buch.

Gal'perin, P. J. (2004). Zur Untersuchung der intelektuellen Entwicklung des Kindes. In W. Jantzen (Hrsg.), *Die Schule Gal'perins. Tätigkeitstheoretische Beiträge zum Begriffserwerb im Vor- und Grundschulalter* (S. 15–30). Berlin: Lehmanns Media.

Galperin, P. J. & Leontjew, A. N. (1972). *Probleme der Lerntheorie*. Berlin: Volk und Wissen.

Gelman, R. & Cohen, M. (1988). Qualitative Differences in the Way Down Syndrom and Normal Children Solve a Novel Counting Problem. In L. Nadel (Hrsg.), *The Psychobiology of Down Syndrome* (S. 51–99). Cambridge: MIT Press.

Gesellschaft für Pädagogik Information und Medien e. V. (2019). Comenius Datenbank.

Gil Clemente, M. E. & Cogolludo-Agustín, J. I. (2019). The Effectiveness of Teaching Geometry to Enhance Mathematical Understanding in Children with Down Syndrome. *International Journal of Disability, Development and Education*, *66*(2), 186–205. https://doi.org/10.1080/1034912X.2019.1571171.

Ginbayashi, K. (1984). *Principles of Mathematics Education – Achievements of AMI*. Tokio: Association of Mathematical Instruction.

Greenwood, D. J. & Levin, M. (1998). *Introduction to Action Research. Social Research for Social Change*. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Grüttner, L. S. (2019). *Systemisches Denken, Wertschätzung und Berücksichtigung von individuellen (Bildungs-)Biographien im Sinne einer ganzheitlichen, verstehenden Diagnostik. Ein Beitrag zur Systemischen Syndromanalyse*. Universität Hamburg.

Gunkel, S. (2000). Montessori-Heilpädagogik als Chance für das behinderte Kind. Praktische Grundlagen der Montessori-(Heil)pädagogik. In M. Hacks (Hrsg.), *Das behinderte Kind frühzeitig fördern* (S. 126–137). Hamburg: Wissenschaftsverlag Wellingsbüttel Hamburg.

Häcker, B. (2007). Mongolismus. In W.E. Gerabek, B.D. Haage, G. Keil & W. Wegner (Hrsg.), *Enzyklopädie Medizingeschichte* (p. 1005). Berlin: De Gruyter.

Hacking, I. (1983). *Representing and intervening*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hager, W. (1987). Grundlagen einer Versuchsplanung zur Prüfung empirischer Hypothesen der Psychologie. *Allgemeine experimentelle Psychologie: eine Einführung in die methodischen Grundlagen mit praktischen Übungen für das experimentelle Praktikum* (S. 43–264). Stuttgart: Fischer.

Hammerer, F. (2004). Montessori-Pädagogik – Ein Weg zu Selbständigkeit, Kompetenz und Lebensfreude. In F. Hammerer & H. Haberl (Hrsg.), *Montessori-Pädagogik heute. Grundlagen – Innenansichten – Diskussionen* (S. 87–121). Wien: Jugend & Volk.

Hatano, G. (1980). Mental Regrouping Strategy for Addition: An Alternative Model to Counting-on. Seattle: National Council of Teachers of Mathematics Research Profession.

Hattie, J. (2013). *Lernen sichtbar machen* (3. Auflage). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Heine, M. (2015). *Die Bedeutung der "Kraft der Fünf" im mathematischen Anfangsunterricht unter der Bedingung einer Trisomie 21.* Universität Hamburg.

Held, D. (2020). *Mathematische Förderung einer 12-Jährigen mit Trisomie 21. Ein Beitrag zur Systemischen Syndromanalyse*. Universität Hamburg.

Hoffmann, T. & Lüth, O. (2007). *Adventure: Zwischen Erzählung und Spiel. Transformationsprozesse in Schülertexten zu „Torins Passage"*. Tönning: Der Andere Verlag.

Hoffmann, T. & Rieckmann, T. (2019). mathildr. Mathematischen Anfangsunterricht mit einer App inklusiv gestalten. *Die Grundschulzeitschrift*, *316*, 53–55.

Ifrah, G. (2010). *Universalgeschichte der Zahlen.* Berlin: Haffmans & Tolkemitt.

Jantzen, W. (2004). Vorwort. In W. Jantzen (Hrsg.), *Die Schule Gal'perins. Tätigkeitstheoretische Beiträge zum Begriffserwerb im Vor- und Grundschulalter* (S. 7–14). Berlin: Lehmanns Media.

Kaufman, E. L., Lord, M. W., Reese, T. W. & Volkmann, J. (1949). The Discrimination of Visual Number. *The American Journal of Psychology*, *62*(4), 498–525.

Kaufmann, L., Handl, P., Margarete, D. & Pixner, S. (2013). Wie Kinder rechnen lernen und was ihnen dabei hilft. In M. von Aster & J.H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörung bei Kindern. Neurowissenschaft, Psychologie, Pädagogik* (2. Auflage, S. 231–257). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Kaufmann, L., Wood, G., Rubinsten, O. & Henik, A. (2011). Meta-Analyses of Developmental fMRI Studies Investigating Typical and Atypical Trajectories of Number Processing and Calculation. *Developmental Neuropsychology*, *36*(6), 763–787. https://doi.org/10.1080/87565641.2010.549884.

Kershner, K. (2016). Flickr , Tumblr , Scribd: Why Dropping Vowels From Brand Names Is So Popular. Zugriff am 16.6.2020. Verfügbar unter: https://money.howstuffworks.com/flickr-tumblr-scribd-why-dropping-vowels-brand-names-is-popular.htm.

King, S., Powell, S. R., Lemons, C. & Davidson, K. A. (2017). Comparison of Mathematics Performance of Children and Adolescents with and without Down Syndrome. *Education and Training in Autism and Developmental Disabilities*, *52*(2), 208–222.

Klafki, W. (2007). *Neue Studien zur Bildungstheorie und Didaktik. Zeitgemäße Allgemeinbildung und kritisch-konstruktive Didaktik* (6. Auflage). Weinheim: Beltz.

Kleiner, B., Rieckmann, T. & Zimpel, A. F. (2016). Diskurstheoretische Perspektiven auf Behinderung, Geschlecht und Sexualität als mögliche Grundlage der Debatte über Inklusion. Ein Versuch. In J. Budde, S. Offen & A. Tervooren (Hrsg.), *Jahrbuch Frauen- und Geschlechterforschung in der Erziehungswissenschaft: Das Geschlecht der Inklusion* (S. 55–74). https://doi.org/10.3224/jfgfe.v12i1.01.

Krauthausen, G. (1995). Die "Kraft der Fünf" und das denkende Rechnen. Zur Bedeutung tragfähiger Vorstellungsbilder im mathematischen Anfangsunterricht. In G.N. Müller & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Mit Kindern rechnen* (S. 87–108). Frankfurt am Main: Der Grundschulverband e.V.

Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule. Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4. Auflage). Berlin: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5.

Krommer, A. (2019). Paradigmen und palliative Didaktik. Oder: Wie Medien Wissen und Lernen prägen. *Routenplaner #digitaleBildung. Auf dem Weg zu zeitgemäßem Lernen. Eine Orientierungshilfe im digitalen Wandel.* (S. 81–100). Hamburg: Verlag ZLL21 e.V.

Kühnel, J. (1922). *Vier Vorträge über neuzeitlichen Rechenunterricht*. Leipzig: Julius Klinkhardt.

Kultusministerkonferenz. (1994). Empfehlungen zur sonderpädagogischen Förderung in den Schulen in der Bundesrepublik Deutschland.

Kultusministerkonferenz. (1998a). Empfehlungen zum Förderschwerpunkt geistige Entwicklung.

Kultusministerkonferenz. (1998b). Empfehlungen zum Förderschwerpunkt Sprache.

Kultusministerkonferenz. (2019). Empfehlungen zur schulischen Bildung, Beratung und Unterstützung von Kindern und Jugendlichen im sonderpädagogischen Schwerpunkt LERNEN.

Kunst- und Ausstellungshalle der Bundesrepublik Deutschland. (2016). *Touchdown. Die Geschichte des Down-Syndroms.* (K. de Braçanca, H. Greuling, R.-G. Lüttgenau, H. Pleiger & G. Wieghaus, Hrsg.). Bonn: Bundeszentrale für politische Bildung.

Kutzer, R. (1983). *Mathematik entdecken und verstehen Band 1*. Frankfurt am Main: Diesterweg.

Kutzer, R. (1985). *Mathematik entdecken und verstehen Band 2*. Frankfurt am Main: Diesterweg.

Landerl, K. (2020). Triple-Code-Modell. *Dorsch – Lexikon der Psychologie*. Hogrefe Verlag.

Landerl, K., Bevan, A. & Butterworth, B. (2004). Developmental dyscalculia and basic numerical capacities: a study of 8–9-year-old students. *Cognition*, *93*(2), 99–125. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2003.11.004.

Leidmedien. (2019). Begriffe über Behinderung von A bis Z. Zugriff am 3.10.2019. Verfügbar unter: https://leidmedien.de/begriffe/.

Leigh, R. J. & Zee, D. S. (2015). *The Neurology of Eye Movements*. New York: Oxford University Press.

Lejeune, J., Gautier, M. & Turpin, M. R. (1959). Étude des chromosomes somatiques de neuf enfants mongoliens. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*, *248*, 1721–1722.

Leont'ev, A. N. (2012). *Tätigkeit – Bewusstsein – Persönlichkeit*. Berlin: Lehmanns Media.

Lewin, K. (1953). Tat-Forschung und Minderheitenprobleme. In K. Lewin & G. Weiß Lewin (Hrsg.), *Die Lösung sozialer Konflikte: ausgewählte Abhandlungen über Gruppendynamik* (S. 278–298). Bad Nauheim: Christian-Verlag.

Lompscher, J. (1973). *Sowjetische Beiträge zur Lerntheorie. Die Schule P. J. Galperins*. Köln: Pahl-Rugenstein.

Lorenz, S., Sloper, T. & Cunnungham, C. (1985). Reading and Down's Syndrome. *British Journal of Special Education*, *12*(2), 65–67.

Maslowski, R. & Visscher, A. (1999). The Potential of Formative Evaluation in Program Design Models. In J. van den Akker, R.M. Branch, K. Gustafson, N. Nieveen & T. Plomp (Hrsg.), *Design Approaches and Tools in Education and Training* (S. 137–144). Dodrecht: Kluwer Academic Publishers.

McKenney, S. (2001). *Computer-based support for science education materials developers in Africa: Exploring potentials*. Universität Twente.

McKenney, S. & Reeves, T. C. (2012). *Conducting Educational Design Research.* Abingdon: Routledge.
Miller, G. A. (1956). The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on our Capacity for Processing Information. *Psychological Review*, *63*(2), 81–97.
Moeller, K., Neuburger, S., Kaufmann, L., Landerl, K. & Nuerk, H.-C. (2009). Basic number processing deficits in developmental dyscalculia: Evidence from eye tracking. *Cognitive Development*, *24*(4), 371–386. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2009.09.007.
Mohr, T. (2019). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs durch Mengenbilder. Eine Evaluation des Unterrichtsmaterials "mathildr".* Universität Hamburg.
Monari Martinez, E. (1998). Teenagers with Down syndrome study algebra in High School. *Down Syndrome Research and Practice*, *5*(1), 34–38.
Monari Martinez, E. (2002). Learning mathematics at school ... and later on. *Down Syndrome News and Update*, *2*(1), 19–23.
Monari Martinez, E. & Benedetti, N. (2011). Learning mathematics in mainstream secondary schools: experiences of students with Down's syndrome. *European Journal of Special Needs Education*, *26*(4), 531–540. https://doi.org/10.1080/08856257.2011.597179.
Monari Martinez, E. & Neodo, K. (2020). Working with the Cartesian Plane and Algebraic Formulas by Students with down Syndrome: Findings of a Small-Scale Study. *International Journal of Disability, Development and Education*, 1–14. Routledge. https://doi.org/10.1080/1034912X.2020.1722072.
Monari Martinez, E. & Pellegrini, K. (2010). Algebra and problem-solving in Down syndrome: a study with 15 teenagers. *European Journal of Special Needs Education*, *25*(1), 13–29. https://doi.org/10.1080/08856250903450814.
Monari Martinez, E. & Rieckmann, T. (2019). Mathematikunterricht neu denken. Algebra, Geometrie und individualisiertes Lernen in der Sekundarstufe. *Leben mit Down-Syndrom*, *92*, 32–42.
Montessori, M. (1983). Die Entdeckung des Geistes (Die Polarisation der Aufmerksamkeit). In P. Oswald & G. Schulz-Benesch (Hrsg.), *Grundgedanken der Montessori-Pädagogik* (7. Auflage, S. 17–24). Freiburg im Breisgau: Herder.
Montessori, M. (2011a). Die Organisation der geistigen Arbeit in der Schule (1915). In H. Ludwig, C. Fischer & M. Klein-Landeck (Hrsg.), *Maria Montessori. Gesammelte Werke. Band 3. Erziehung und Gesellschaft* (S. 397–403). Freiburg im Breisgau: Herder.
Montessori, M. (2011b). Der Charakter des Kindes. In F. Hammerer & H. Ludwig (Hrsg.), *Maria Montessori. Gesammelte Werke. Band 7. Das Kind in der Familie* (S. 53–65). Freiburg im Breisgau: Herder.
Montessori, M. (2012a). *Maria Montessori. Gesammelte Werke. Band 1. Die Entdeckung des Kindes.* (H. Ludwig, C. Fischer & M. Klein-Landeck, Hrsg.) (2. Auflage). Freiburg im Breisgau: Herder.
Montessori, M. (2012b). *Maria Montessori. Gesammelte Werke. Band 11. Psychoarithmetik.* (H.F. Baumann, Hrsg.). Freiburg im Breisgau: Herder.
Montessori, M. (2014a). Leitfaden zur Beobachtung des Kindes: Aufmerksamkeit bei der Arbeit, Übergang von Ungeordnetheit zu Geordnetheit, Gehorsam. 11. Vortrag: 26. August 1915. In E. Eckert & H. Ludwig (Hrsg.), *Maria Montessori. Gesammelte Werke. Band 5. Kalifornische Vorträge* (S. 175–187). Freiburg im Breisgau: Herder.
Montessori, M. (2014b). Erwecken und Aufrechterhalten der Aufmerksamkeit – Zwei gegensätzliche Ansätze – Bedingungen für naturgemäßes Lernen – Die Materialien und die

innere Kraft – Entdeckendes Lernen. 21. Vortrag: 22. September 1815. In E. Eckert & H. Ludwig (Hrsg.), *Maria Montessori. Gesammelte Werke. Band 5. Kalifornische Vorträge* (S. 268–277). Freiburg im Breisgau: Herder.

Müller, F. J. (2019). *Chancen und Herausforderungen staatlich finanzierter, frei verfügbarer Bildungsmaterialien (OER) am Beispiel der Plattform ndla.no in Norwegen – ein Weg zu mehr Inklusion?* Hamburg: Verlag ZLL21 e.V.

Müller, J. (2015). *Das Spiel als Grundlage eines handlungsorientierten Mathematikunterrichts. Eine Systemische Syndromanalyse zur Trisomie 21*. Universität Hamburg.

Musahl, H.-P. & Schwennen, C. (2000). Versuchsplanung. *Lexikon der Psychologie*. Spektrum Akademischer Verlag.

Nehls, W. (2017). *Guter inklusiver Mathematikunterricht. Materialauswahl unter Berücksichtigung von Entwicklung und Aufmerksamkeit*. Universität Hamburg.

Neuhaus, E. (1967). Zur Gegenwartsbedeutung der Montessori-Pädagogik. *Die deutsche Schule*, (59), 90–106.

Nieveen, N. & Folmer, E. (2013). Formative Evaluation in Educational Design Research. In T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research. Part A: An introduction* (S. 153–169). Enschede: Netherlands institute for curriculum development (SLO).

Nimz, P. N. (2018). *Mathematische Förderung einer Neunjährigen mit Trisomie 21. Eine Systemische Syndromanalyse*. Universität Hamburg.

Nuerk, H.-C., Klein, E. & Willmes, K. (2013). Zahlenverarbeitung und Rechnen. In F. Schneider & G.R. Fink (Hrsg.), *Funktionelle MRT in Psychiatrie und Neurologie* (2. Auflage, S. 443–456). Springer.

Osburg, C. (1998). Initiierung von Lernprozessen aus konstruktivistischer Sicht – dargestellt am Beispiel semantischen Lernens im sprachlichen Anfangsunterricht. In C. Osburg (Hrsg.), *Textschreiben – Rechtschreiben – Alphabetisierung* (S. 192–219). Baltmannsweiler: Schneider Verlag Hohengehren.

Osburg, C. & Schütt, A. S. (2015). Theater und Darstellendes Spiel inklusiv. Unterrichtsanregungen für die Klassen 1–10. Mülheim an der Ruhr: Verlag an der Ruhr.

Paterson, S. J., Girella, L., Butterworth, B. & Karmiloff-Smith, A. (2006). Are numerical impairments syndrome specific? Evidence from Williams syndrome and Down's syndrome. *Journal of Child Psychology and Psychiatry*, *47*(2), 190–204.

Petereit, D. (2020). Webdesign : So steht es um Progressive-Web- Apps im Jahr 2020. Zugriff am 15.6.2020. Verfügbar unter: https://t3n.de/news/webdesign-steht-um-jahr-2020-1242754/2/.

Petkewitz, R. (2019). Ohrenkuss FAQ – "Das Down-Syndrom ist eine Krankheit." Zugriff am 3.10.2019. Verfügbar unter: https://touchdown21.info/de/seite/20-faq/article/262-das-down-syndrom-ist-eine-krankheit.html.

Pfeiffer, U. & Weidner, R. (2013). Augenbewegungen. In F. Schneider & G.R. Fink (Hrsg.), *Funktionelle MRT in Psychiatrie und Neurologie* (2. Auflage, S. 181–190). Berlin: Springer.

Piaget, J. (1947). *Psychologie der Intelligenz*. Zürich: Rascher.

Piaget, J. (1973). *Einführung in die genetische Erkenntnistheorie*. Frankfurt am Main: Suhrkamp.

Piaget, J. & Inhelder, B. (1986). *Die Psychologie des Kindes*. München: Deutscher Taschenbuch Verlag.

Piaget, J. & Szeminska, A. (1975). *Die Entwicklung des Zahlbegriffs beim Kinde*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Piazza, M., Mechelli, A., Butterworth, B. & Price, C. J. (2002). Are Subitizing and Counting Implemented as Separate or Functionally Overlapping Processes? *NeuroImage*, *15*(2), 435–446. https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0980.

Plomp, T. (2013). Educational Design Research: An Introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Hrsg.), *Educational Design Research. Part A: An introduction* (S. 11–50). Enschede: Netherlands institute for curriculum development.

Plomp, T. & Nieveen, N. (2013). *Educational Design Research. Part B: Illustrative cases.* (T. Plomp & N. Nieveen, Hrsg.). Enschede: Netherlands institute for curriculum development. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3185-5.

Porter, J. (1999). Learning to Count: A Difficult Task? *Down Syndrome Research and Practice*, *6*(2), 85–94. https://doi.org/10.3104/reports.99.

Raab, D. (2016). *Einfach lernen mit Rabe Linus – Mein erstes Rechenbuch. 1. Klasse*. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Ratz, C. (2016). Wie soll man Zahlen bis 10 darstellen ? *Lernen konkret*, (4), 16–19.

Ratz, C. & Moser Opitz, E. (2016). Mathematische Förderung von Schülerinnen und Schülern mit Down-Syndrom. *Zeitschrift für Heilpädagogik*, *67*, 400–411.

Rawohl, J. C. (2019). *Förderung des arithmetischen Verständnisses mithilfe von Mengenbildern*. Universität Hamburg.

Renner, K. (1996). Konzentration als pädagogisches Grundphänomen. In W. Böhm (Hrsg.), *Maria Montessori. Texte und Gegenwartsdiskussion* (5. Auflage, S. 139–143). Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Richey, R. C. & Nelson, W. A. (1996). Developmental Research. In D.H. Jonassen (Hrsg.), *Handbook of research for educational communications and technologiy* (S. 1213–1245). New York: Macmillan Library Reference.

Rieckmann, T. (2014). *Arithmetik, Algebra und Trisomie 21. Eine Gegenstandsanalyse.* Universität Hamburg.

Rieckmann, T. (2016). Kognitive Entwicklung und Mathematik. In A.F. Zimpel (Hrsg.), *Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können* (S. 166–183). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Rieckmann, T. (2018). Durchblick im App-Dschungel. *Leben mit Down-Syndrom*, *88*, 43–48.

Rinaldi, L. J., Smees, R., Alvarez, J. & Simner, J. (2020). Do the Colors of Educational Number Tools Improve Children's Mathematics and Numerosity? *Child Development*, *91*(4), 1–15. https://doi.org/10.1111/cdev.13314.

Röhm, A. C. (2016). Imitation und Bewegungslernen. In A.F. Zimpel (Hrsg.), *Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können* (S. 140–152). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Röhm, A. C. (2017). *Bewegungslernen und Trisomie 21. Eine Studie zur Imitationsfähigkeit von Menschen mit Down-Syndrom*. Marburg: Lebenshilfe Verlag.

Röhrs, T. (2019). *Einsatz des Mathematikmaterials "mathildr" im inklusiven Kontext. Beiträge zur systemischen Syndromanalyse*. Universität Hamburg.

Rose, G. (1953). *Grundriß einer allgemeinen Unterrichtslehre*. Berlin: Dürrsche Buchhandlung.

Rosenkranz, C. (2001). *Kieler Zahlenbilder. Ein Förderprogramm zum Aufbau des Zahlbegriffs für rechenschwache Kinder. Zahlenraum 1 – 20. Handbuch* (3. Auflage). Kiel: Veris Verlag.

Ruf, U. & Gallin, P. (2014). *Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik. Band 1: Austausch unter Ungleichen* (5. Auflage). Seelze: Kallmeyer.

Scherer, P. (1996). „Das kann ich schon im Kopf." Zum Einsatz von Arbeitsmitteln und Veranschaulichungen im Unterricht mit lernschwachen Schülern. *Grundschulunterricht*, *43*(3), 24–56.

Schipper, W. (1996). Arbeitsmittel für den arithmetischen Anfangsunterricht. Kriterien zur Auswahl. *Die Grundschulzeitschrift*, *96*, 26–41.

Schleifer, P. & Landerl, K. (2011). Subitizing and counting in typical and atypical development. *Developmental Science*, *14*(2), 280–291. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2010.00976.x.

Schneider, W. X., Deubel, H. & Wesenick, M.-B. (2001). Characterizing chunks in visual short-term memory: Not more than one feature per dimension? *Behavioral and Brain Sciences*, *24*(1), 144–145. https://doi.org/10.1017/S0140525X01513928.

Schroeder, R. & Schulz, B. (2018). Sonderpädagogische Diagnostik. „Manchmal wird Förderschule zur Einbahnstraße". Zugriff am 5.10.2019. Verfügbar unter: https://www.deutschlandfunk.de/sonderpaedagogische-diagnostik-manchmal-wird-foerderschule.680.de.html?dram:article_id=423256.

Schumann, B. (2018). *Streitschrift Inklusion. Was Sonderpädagogik und Bildungspolitik verschweigen.* Frankfurt am Main: Debus Pädagogik Verlag.

Séguin, É. (1864). *Traitement moral, hygiène et éducation des idiots.* Paris: J. B. Balliere.

Séguin, É. (2012). *Moralische Behandlung, Hygiene und Erziehung der Idioten.* (E. Rohrmann, Hrsg.). Marburg: Tectum Verlag.

Sella, F., Lanfranchi, S. & Zorzi, M. (2013). Enumeration skills in Down syndrome. *Research in Developmental Disabilities*, *34*(11), 3798–3806. Elsevier Ltd. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2013.07.038.

Shepperdson, B. (1994). Attainments in reading and number of teenagers and adults with Down's syndrome. *Down Syndrome Research and Practice*, *2*(3), 97–101. https://doi.org/10.3104/reports.37.

Simon, L. (2019). *Digitale Mündigkeit. Eigenverantwortlich im 21. Jahrhundert*. Bielefeld: Art d'Ameublement.

Singer, J. (1998). *Odd People In. The Birth of Community Amongst People on the "Autistic Spectrum."* Sydney: University of Technology.

Sinner, D. (2016). *Zählendes Rechnen überwinden – Zahlenraum bis 20*. Augsburg: Auer Verlag.

Sodian, B. (2002). Entwicklung des Denkens. In R. Oerter & L. Montada (Hrsg.), *Entwicklungspsychologie* (S. 436–479). Weinheim: Beltz.

SoVD Landesverband Niedersachsen. (2019). Inklusionspreis Niedersachsen – Preisverleihung 2019. Zugriff am 20.11.2020. Verfügbar unter: https://www.inklusionspreis-niedersachsen.de/preisverleihung-2019.

Spektrum.de. (2000). Tachistoskop – Lexikon der Psychologie. Verfügbar unter: https://www.spektrum.de/lexikon/psychologie/tachistoskop/15260.

Strauss, A. (2017). *Ultraschallpraxis in Geburtshilfe und Gynäkologie.* Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-49493-6.

Strauß-Ehret, C. (2017). Würfelhaus – Rechnen lernen. Apple App Store.
Tatler, B. W. & Land, M. F. (2015). Everyday Visual Attention. In J. Fawcett, E. Risko & A. Kingstone (Hrsg.), *The Handbook of Attention* (S. 391–421). Cambridge: MIT Press.
Thompson, C. & Van de Walle, J. (1984). Let's Do It. The Power of 10. *Arithmetic Teacher*, *32*, 6–11.
Trick, L. M. & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, *101*(1), 80–102. https://doi.org/10.1037/0033-295X.101.1.80.
Urff, C. (2017). Zwanzigerfeld für iPad. Apple App Store.
Valle, M. (2019). *Montessori-Pädagogik und neue Technologien*. (H. Ludwig, Hrsg.). Münster: LIT Verlag.
Viciano Gofferje, A. (2004). Die unmögliche Karriere. *FOCUS Magazin*, (22).
Wacquant, L. D. J. (1996). Für eine wissenschaftstheoretische Reflexivität. In P. Bourdieu & L.D.J. Wacquant (Hrsg.), *Reflexive Anthropologie* (S. 62–76). Frankfurt am Main: Suhrkamp.
Wedel, M. (2015). Attention Research in Marketing: A Review of Eye-Tracking Studies. In J. Fawcett, E. Risko & A. Kingstone (Hrsg.), *The Handbook of Attention* (S. 569–588). Cambridge: MIT Press.
Weiss, A. & Rapp, M. (2017). Kontrovers vom 17.05.2017. Bayrischer Rundfunk.
Weisse, S., Burkhart, S. & Franz, P. (2019). *Klick! inklusiv. Mathematik 1/2. Zahlenraum bis 10*. Berlin: Cornelsen.
Werning, C. (2019). Barrierefreie Lernsoftware & Apps für inklusives Lernen. tjfbg gGmbH.
Weskamp, S. (2019). *Heterogene Lerngruppen im Mathematikunterricht der Grundschule* (Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik). Wiesbaden: Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-658-25233-5.
Wiener, N. (1985). *Cybernetics: or Control and Communication in the Animal and the Machine* (2. Auflage). Cambridge: MIT Press.
Wieser, B. & Hotter, A. (2011). *3 x 21 = von der Wurzel bis zur Blüte*. Leoben: Verein Hand in Hand.
Wirtz, R. (1978). An Elementary Mathematics Curriculum for ALL Children. San Diego: National Council of Supervisors of Mathematics meeting.
Wittmann, E. Ch. (1994). Legen und Überlegen. Wendeplättchen im aktiv-entdeckenden Rechenunterricht. *Die Grundschulzeitschrift*, *72*, 44–46.
Wittmann, E. Ch. (2012). Das Projekt „ mathe 2000 ": Wissenschaft für die Praxis – eine Bilanz aus 25 Jahren didaktischer Entwicklungsforschung. In G.N. Müller, C. Selter & E.Ch. Wittmann (Hrsg.), *Zahlen, Muster und Strukturen. Spielräume für aktives Lernen und Üben* (S. 265–279). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (1997). *Mein Tausenderbuch* (3. Auflage). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2008). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (7. Auflage, S. 42–65). Berlin: Cornelsen Scriptor.
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2012). *Das Zahlenbuch 1. Arbeitsheft*. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2015). *Fördern und Diagnose mit dem Blitzrechenkurs. Handreichung für die Praxis.* Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
Wittmann, E. Ch. & Müller, G. N. (2019). *Handbuch produktiver Rechenübungen. Band I: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (2. Auflage). Stuttgart: Ernst Klett Verlag.
World Health Organization. (2020). ICD-11 for Mortality and Morbidity Statistics (Version : 09/2020). Zugriff am 31.1.2021. Verfügbar unter: https://icd.who.int/browse11/l-m/en#/http://id.who.int/icd/entity/411470068.
Wunder, M. (1982). Wider die Therapiesucht! In M. Wunder & U. Sierck (Hrsg.), *Sie nennen es Fürsorge. Behinderte zwischen Vernichtung und Widerstand. Mit Beiträgen vom Gesundheitstag Hamburg 1981* (S. 73–76). Berlin: Verlagsgesellschaft Gesundheit.
Wundt, W. (1911). *Einführung in die Psychologie.* Leipzig: R. Voigtländers Verlag.
Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature*, *358*, 749–750. https://doi.org/10.1038/358749a0.
Ziemen, K. (2013). *Kompetenz für Inklusion. Inklusive Ansätze in der Praxis umsetzen.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Ziemen, K. (2017a). Inklusive Didaktik. In K. Ziemen (Hrsg.), *Lexikon Inklusion* (S. 107–109). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Ziemen, K. (2017b). Kompetenz. In K. Ziemen (Hrsg.), *Lexikon Inklusion* (S. 151–152). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Ziemen, K. (2018). *Didaktik und Inklusion.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2010a). *Zwischen Neurobiologie und Bildung*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2010b). Zur Neuropsychologie des abstrakten Denkens unter den Bedingungen einer Trisomie 21. *Leben mit Down-Syndrom*, *63*, 28–35.
Zimpel, A. F. (2010c). Die Verobjektivierung des Subjektiven. In A.F. Zimpel (Hrsg.), *Zwischen Neurobiologie und Bildung* (S. 21–36). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2010d). Die biologische Bedeutung des Erlebens. In A.F. Zimpel (Hrsg.), *Zwischen Neurobiologie und Bildung* (S. 37–56). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2011). *Lasst unsere Kinder spielen!* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2012a). *Der zählende Mensch. Was Emotionen mit Mathematik zu tun haben* (2. Auflage). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2012b). *Einander helfen. Der Weg zur inklusiven Lernkultur*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2013a). Aufmerksamkeit I: Fokussierung. In G. Feuser & J. Kutscher (Hrsg.), *Entwicklung und Lernen* (S. 240–243). Stuttgart: Kohlhammer.
Zimpel, A. F. (2013b). Studien zur Verbesserung des Verständnisses von Lernschwierigkeiten bei Trisomie 21 – Bericht über die Ergebnisse einer Voruntersuchung. *Zeitschrift für Neuropsychologie*, *24*(1), 35–47. https://doi.org/10.1024/1016-264X/a000085.
Zimpel, A. F. (2014). *Spielen macht schlau!* München: Gräfe & Unzer.
Zimpel, A. F. (2016). *Trisomie 21. Was wir von Menschen mit Down-Syndrom lernen können.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2017a). Trisomie 21. In K. Ziemen (Hrsg.), *Lexikon Inklusion* (S. 224–226). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
Zimpel, A. F. (2017b). Geistige Behinderung. In K. Ziemen (Hrsg.), *Lexikon Inklusion* (S. 84–86). Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Zimpel, A. F. & Rieckmann, T. (2020). The Influence of Trisomy 21 on Subitising Limit. *International Journal of Disability, Development and Education*, 1–19. Routledge. https://doi.org/10.1080/1034912X.2020.1737317.

Zimpel, A. F. & Röhm, A. C. (2018). A Study of Imitation Ability in People with Trisomy 21. *Zeitschrift für Neuropsychologie*, *29*(4), 223–235. https://doi.org/10.1024/1016-264X/a000232.

Zokaei, N., Board, A. G., Manohar, S. G. & Nobre, A. C. (2019). Modulation of the pupillary response by the content of visual working memory. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *116*(45), 22802–22810. https://doi.org/10.1073/pnas.1909959116.